Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τη συγγραφή αυτού του βιβλίου, νιώθω την ανάγκη να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους φοιτητές και μαθητές μου, τους οποίους ταλαιπώρησα τόσα χρόνια μιλώντας τους συνέχεια για την ομορφιά των μαθηματικών. Οι απορίες τους και το ενδιαφέρον τους για το μάθημα αποτέλεσαν τα βασικά κίνητρα για τη συγγραφή αυτού του βιβλίου. Όσοι το διαβάσουν εκ των υστέρων θα αναγνωρίσουν στον τρόπο γραφής του πολλά σημεία από τις προφορικές διαλέξεις των μαθημάτων.

Επίσης ένα ευχαριστώ στους φίλους και συναδέλφους Τέα Κοψίδη και Δημήτρη Σερεμέτη, για τις παρατηρήσεις τους.

Τέλος να ευχαριστήσω τον Θοδωρή, για την άπειρη υπομονή και κατανόησή του κατά τη διάρκεια της συγγραφής αυτού του βιβλίου, χωρίς τη βοήθεια του οποίου δεν θα είχε ολοκληρωθεί ποτέ.

Μαρία Μαύρη
Ιούνιος 2013

Δύο λόγια από τη συγγραφέα

Τα μαθηματικά ή τα λατρεύεις ή τα μισείς!

Για να λατρέψεις κάτι πρέπει να το κατανοήσεις, για τη δεύτερη περίπτωση τα πράγματα μάλλον είναι λίγο πιο απλά. Στόχος αυτού του βιβλίου είναι προφανώς να κάνει τον αναγνώστη να τα λατρέψει. Κι αυτό γιατί, πέρα από τις απλουστευτικές δηλώσεις ότι «τα μαθηματικά είναι δύσκολα», υπάρχει μια αδιαμφισβήτητη αλήθεια: τα μαθηματικά έχουν λογική, και το μόνο που χρειάζεται να κάνει κανείς για να τα κατανοήσει είναι να ακολουθήσει τη λογική τους. Η συνέχεια απλά είναι απολαυστική.

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται τόσο σε φοιτητές που νιώθουν μια έλξη από τον χώρο του Λογισμού όσο και σε φοιτητές που «πρέπει» να παρακολουθήσουν ένα μάθημα μαθηματικών προκειμένου να ολοκληρώσουν επιτυχώς το πρόγραμμα σπουδών που παρακολουθούν.

Το συγκεκριμένο βιβλίο έχει διπλή ταυτότητα, να παρουσιάσει τις έννοιες της συνάρτησης, της συνέχειας, της παραγώγισης, της ολοκλήρωσης και της άλγεβρας με τρόπο ώστε αυτές να γίνουν κατανοητές από τον φοιτητή και εν συνεχεία να τις αναδείξει ως βασικά εργαλεία για τη μελέτη της συμπεριφοράς οικονομικών συναρτήσεων και υποδειγμάτων.

Τα μαθηματικά μπορούν να είναι αυτοσκοπός, μπορούν όμως να είναι και μέσο, και αυτή είναι η βασική φιλοσοφία του βιβλίου που κρατάτε στα χέρια σας. Ο Πυθαγόρας, ο Fermat, ο Leibnitz, ο Gauss, ο Euler, ο Jacobi και ο Riemann μπορούν άνετα να συνδιαλέγουν με τον Keynes, τον Smith, τον Samuelson και τον Leontief πάνω στο προνομιακό πεδίο που τους προσφέρει η αλληλεπίδραση των μαθηματικών και της οικονομικής επιστήμης.

Η καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών συνεπάγεται και μεγαλύτερη κατανόηση των μεταβολών των οικονομικών μεγεθών. Έτσι, σε κάθε κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά οι έννοιες, οι μέθοδοι και οι αντίστοιχες μαθηματικές τεχνικές και εν συνεχεία περιγράφεται η εφαρμογή τους στην οικονομική επιστήμη. Σε κάποιες ενότητες, όπως αυτές των παραγώγων και των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, παρουσιάζονται σ' ένα κεφάλαιο οι μαθηματικές έννοιες και σε επόμενο κεφάλαιο οι αντίστοιχες οικονομικές εφαρμογές.

Με περισσότερα από 200 λυμένα παραδείγματα, 150 διαγράμματα και με αναλυτική παρουσίαση όλων των δύσκολων σημείων των εννοιών που μοιάζουν «αφηρημένες», το συγκεκριμένο βιβλίο φιλοδοξεί να αποτελέσει ένα σύγγραμμα αναφοράς για τους φοιτητές, στο οποίο μπορούν να ανατρέξουν οποιαδήποτε στιγμή για να βρουν και να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές έννοιες και οικονομικά υποδείγματα.

Μετά την πρώτη ανάγνωση του βιβλίου, ο αναγνώστης θα έχει καταλάβει ότι η επιστήμη και τα γνωστικά αντικείμενα δεν περιχαρακώνονται πίσω από λέξεις και νοητικές γραμμές. Η αλληλεπίδραση των αντικειμένων αποτελεί βασική κινητήρια δύναμη στην ιστορία της επιστήμης. Η από κοινού πορεία και εξέλιξη των μαθηματικών και της οικονομικής επιστήμης είναι το βασικό χαρακτηριστικό αυτού του συγγράμματος.

Καλή ανάγνωση!

«Τα μαθηματικά αντικαθιστούν τα απλά χαρακτηριστικά του πολύπλοκου κόσμου μας με αφηρημένα. Αναλύοντας τα αφηρημένα χαρακτηριστικά ανακαλύπτουμε την κρυμμένη απλότητα των νόμων της φύσης».

Πηγή: Ian, Stewart, *Οι Μυστικοί Αριθμοί*, σελ. 168.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Στόχος του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι η παρουσίαση του συνόλου των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων τους.

1.1 Σύνολα αριθμών

Ως **σύνολο** ορίζεται μια συλλογή διακριτών αντικειμένων, τα οποία ονομάζονται στοιχεία του συνόλου.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με $\Re$ και αποτελείται από τα εξής υποσύνολα:

- Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\aleph = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Το σύνολο των ακέραιων αριθμών $\mathbb{Z} = \{x - y : x, y \in \aleph\} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q} = \left\{\frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\right\}$
- Το σύνολο των άρρητων αριθμών $\Re - \mathbb{Q}$

Επειδή κάθε ακέραιος αριθμός x μπορεί να εκφραστεί ως ρητός της μορφής $\frac{x}{1}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών αποτελείται από ρητούς και άρρητους αριθμούς.

Στο σύνολο $\Re$ των πραγματικών αριθμών εισάγονται:

- Οι πράξεις της πρόσθεσης (+) και του πολλαπλασιασμού ($\bullet$)
- Οι σχέσεις ολικής διάταξης (< ή >)

Στο τέλος του συγκεκριμένου κεφαλαίου θα έχεις μάθει:
- Τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών
- Την αλγεβρική δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών

Για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς x και y, ορίζεται το άθροισμά τους $x+y$, το γινόμενο $x \cdot y$ και η σχέση διάταξης (ο x είναι μικρότερος από τον y ή αντίστοιχα ο x είναι μεγαλύτερος από τον y).

Οι παραπάνω πράξεις δίνουν στο $\Re$ την αλγεβρική του δομή.

1.2 Αλγεβρική δομή του $\Re$

1.2.1 Ιδιότητες πρόσθεσης

Η πράξη της πρόσθεσης εκτελείται κάθε φορά που δίνεται ένα ζεύγος αριθμών x και y. Το άθροισμα $x+y$ υπάρχει πάντοτε ακόμη και σε περιπτώσεις που οι αριθμοί είναι είτε ίσοι είτε αντίθετοι.

Έστω x, y, z πραγματικοί αριθμοί, ισχύουν τα εξής:

1) *Αντιμεταθετική ιδιότητα* $x+y=y+x \ \forall x, y \in \Re$

2) *Προσεταιριστική ιδιότητα* $(x+y)+z=x+(y+z) \ \forall x, y, z \in \Re$

Για κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύουν τα εξής:

3) *Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου*
$x+0=x$, υπάρχει αριθμός που τον ονομάζουμε μηδέν και είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.

4) *Ύπαρξη αντίθετου*
$x+(-x)=(-x)+x=0$, υπάρχει ο αντίθετος πραγματικός αριθμός.

1.2.2 Ιδιότητες πολλαπλασιασμού

Έστω x, y, z πραγματικοί αριθμοί, ισχύουν τα εξής:

5) *Αντιμεταθετική ιδιότητα* $x \cdot y=y \cdot x \ \forall x, y \in \Re$

6) *Προσεταιριστική ιδιότητα* $(x \cdot y) \cdot z=x \cdot (y \cdot z)$, $\forall x, y, z \in \Re$

Για κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύουν τα εξής:

7) *Ύπαρξη μονάδας*
$x \cdot 1=1 \cdot x=x$, $1 \neq x$, υπάρχει πραγματικός αριθμός που τον ομομάζουμε «μονάδα» (1) και είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

8) *Ύπαρξη αντίστροφου*
$x \cdot x^{-1}=x \cdot x^{-1}=1$, με $x \neq 0$, υπάρχει ο αντίστροφος αριθμός.

Ιδιότητα πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού

9) *Επιμεριστική ιδιότητα* $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, $\forall x, y, z \in \Re$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε τις πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης.

Ορισμός της πράξης της αφαίρεσης: Αν x και y είναι δύο πραγματικοί αριθμοί, τότε $x - y = x + (-y)$.

Το – είναι το σύμβολο της αφαίρεσης.

Ορισμός της πράξης της διαίρεσης: Αν x και y είναι δύο πραγματικοί αριθμοί, με $y \neq 0$, τότε $\frac{x}{y}$.

Το / είναι το σύμβολο της διαίρεσης.

1.2.3 Ιδιότητες διάταξης

Ορισμός: Με τη σχέση διάταξης που ορίζεται στο σύνολο $\Re$ χαρακτηρίζεται ένας αριθμός x ως μικρότερος (ή μεγαλύτερος) από έναν άλλο αριθμό y, $(x < y)$ ή $(x > y)$.

10) *Μεταβατική ιδιότητα*

Αν x , y , z είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύουν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$

11) *Ιδιότητα τριχοτομίας*

Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών x, y ισχύουν τα παρακάτω:

i. $x = y$
ii. $x < y$
iii. $x > y$

Οι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $x > 0$ ονομάζονται **θετικοί αριθμοί** και οι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $x < 0$ ονομάζονται **αρνητικοί αριθμοί.**

Πρόταση: Ισχύουν τα παρακάτω:

i. Αν x , y είναι πραγματικοί αριθμοί με $x > y$, τότε $x + z > y + z$ για κάθε πραγματικό αριθμό z
ii. Αν x , y , z και k είναι πραγματικοί αριθμοί με $x > y$ και $z > k$, τότε $x + z > y + k$
iii. Αν x , y , z είναι πραγματικοί αριθμοί με $x > y$ και $z > 0$, τότε $x \cdot z > y \cdot z$
iv. Αν $x > 0$, τότε $-x < 0$
v. Αν $x > 0$ και $y > 0$, τότε $x \cdot y > 0$
vi. Αν $x > 0$ και $y < 0$, τότε $x \cdot y < 0$

vii. Αν $0 < x < y$, τότε $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

viii. Αν $x < 0$ και $y < 0$, τότε $x \cdot y > 0$

ix. Αν $x \neq 0$, τότε $x^2 > 0$, όπου $x^2 = x \cdot x$

x. Αν $x > y$, τότε $x - y > 0$

1.2.4 Βοηθητικές προτάσεις

Πρόταση 1: Το ουδέτερο στοιχείο (0) στην πρόσθεση είναι μοναδικό.

Πρόταση 2: Για κάθε πραγματικό αριθμό x, ο αντίθετός του $-x$ είναι μοναδικός πραγματικός αριθμός.

Πρόταση 3: $x \cdot 0 = 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Πόρισμα 1: Ο αριθμός (0) δεν έχει αντίστροφο. Δηλαδή δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x ώστε $x \cdot 0 = 1$.

Πρόταση 4: Το ουδέτερο στοιχείο (1) του πολλαπλασιασμού είναι μοναδικό.

Πρόταση 5: Για κάθε πραγματικό αριθμό x, με $x \neq 0$, ο αντίστροφός του $\frac{1}{x}$ είναι μοναδικός πραγματικός αριθμός.

Ορισμός: Έστω πραγματικός αριθμός x. Θέτουμε $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$. Ο αριθμός $|x|$ ονομάζεται απόλυτη τιμή του x και είναι μοναδικός.

Πρόταση 6: Για κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύουν τα ακόλουθα:

i. $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$ όπου $\theta \geq 0$

ii. $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$ όπου $\theta \geq 0$

Πρόταση 7: Έστω x, y είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

ii. (*Τριγωνική ανισότητα*) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Παράδειγμα 1.1: Αν $a < b$, να αποδείξετε ότι $a < \frac{a+b}{2} < b$

Θα αποδείξω τις δύο ανισότητες χωριστά, δηλαδή τις $a < \frac{a+b}{2}$ (1) και $\frac{a+b}{2} < b$ (2)

Για την (1): Από υπόθεση $a < b$. Προσθέτω το a και στα δύο μέλη

$a + a < b + a \Leftrightarrow 2a < b + a \Leftrightarrow a < \frac{b+a}{2}$

Για τη (2): Από υπόθεση $a < b$. Προσθέτω το b και στα δύο μέλη

$a + b < b + b \Leftrightarrow a + b < 2b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} < b$

Οπότε από (1) και (2) έχουμε $a < \frac{a+b}{2} < b$

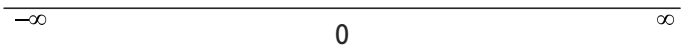
Παράδειγμα 1.2: Να δείξετε ότι $(a+b)^2 \geq 4a \cdot b \ \forall a, b \in \Re$

Αναπτύσσω το πρώτο μέλος της $(a+b)^2 \geq 4a \cdot b$

$a^2 + b^2 + 2a \cdot b \geq 4a \cdot b \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ που ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική.

1.3 Πληρότητα πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών απεικονίζεται γραφικά με τον παρακάτω άξονα.

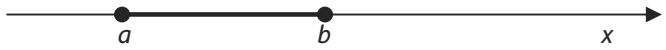


Σχήμα 1.1: Ο άξονας των πραγματικών αριθμών

Βασισμένοι στις ιδιότητες της διάταξης των πραγματικών αριθμών όπως τις ορίσαμε στην Παράγραφο 1.2.3, μπορούμε να ορίσουμε ως διάστημα το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών μεταξύ δύο τυχαίων αριθμών $a, b \in \Re$.

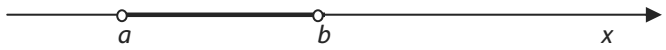
Ορισμός: Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί *a, b* για τους οποίους ισχύει $a < b$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τα παρακάτω διαστήματα:

$[a,b] \equiv \{x \in \Re : a \le x \le b\}$ κλειστό διάστημα



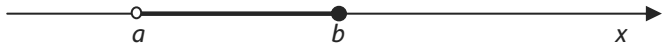
(α)

$(a,b) \equiv \{x \in \Re : a < x < b\}$ ανοιχτό διάστημα



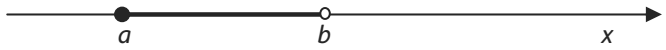
(β)

$(a,b] \equiv \{x \in \Re : a < x \le b\}$ κλειστό διάστημα από δεξιά



(γ)

$[a,b) \equiv \{x \in \Re : a \le x < b\}$ κλειστό διάστημα από αριστερά



(δ)

Σχήμα 1.2: Ανοιχτά και κλειστά διαστήματα

Τα **ακραία σημεία** ενός διαστήματος ονομάζονται **συνοριακά σημεία** και αποτελούν τα σύνορα του διαστήματος. Τα υπόλοιπα σημεία είναι **εσωτερικά σημεία** του διαστήματος.

Το **ανοιχτό** διάστημα δεν περιέχει κανένα συνοριακό σημείο.

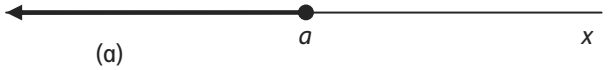
Μήκος διαστήματος με άκρα a και b ονομάζουμε τον μη αρνητικό αριθμό $b-a$ $(a < b \in \mathbb{R})$.

Τα παραπάνω διαστήματα, που τα άκρα τους είναι συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί, είναι **πεπερασμένα** διαστήματα.

Άπειρα διαστήματα έχουμε στην περίπτωση που το ένα άκρο είναι $-\infty$ ή $+\infty$.

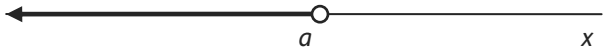
Έστω $a \in \Re$, τότε μπορούμε να ορίσουμε τα διαστήματα:

$(-\infty, a] \equiv \{x \in \Re : x \leq a\}$ το διάστημα με όλους τους αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι του a



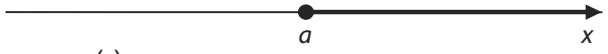
(α)

$(-\infty, a) \equiv \{x \in \Re : x < a\}$ το διάστημα με όλους τους αριθμούς που είναι μικρότεροι του a



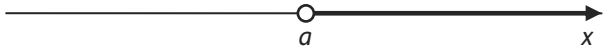
(β)

$[a, +\infty) \equiv \{x \in \Re : x \geq a\}$ το διάστημα με όλους τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του a



(γ)

$(a, +\infty) \equiv \{x \in \Re : x > a\}$ το διάστημα με όλους τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του a



(δ)

Σχήμα 1.3: Απειροδιαστήματα

Ένα διάστημα που τα άκρα του ταυτίζονται ονομάζεται **εκφυλισμένο.** Αν το διάστημα είναι της μορφής:

i. (a, b) τότε ταυτίζεται με το κενό σύνολο, $(a, b) = \varnothing$
ii. $[a, b]$ τότε ταυτίζεται με τα ακραία σημεία του $\{a\} = \{b\}$
iii. $(a, b]$ ή $[a, b)$ δεν έχουν νόημα

Ορισμός: Έστω Y υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Το Y είναι:

i. *άνω φραγμένο* αν υπάρχει $a \in \Re$ τέτοιος ώστε $x \leq a$, $\forall\, x \in Y$. Ο αριθμός a αποτελεί ένα άνω φράγμα του Y.
ii. *κάτω φραγμένο* αν υπάρχει $b \in \Re$ τέτοιο ώστε $x \geq b$, $\forall\, x \in Y$. Ο αριθμός b αποτελεί ένα κάτω φράγμα του Y.
iii. *φραγμένο* αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Σημείωση:

- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένο.

- Το σύνολο των θετικών αριθμών είναι κάτω φραγμένο.
- Το σύνολο των αρνητικών αριθμών είναι άνω φραγμένο.
- Το κενό σύνολο είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Ορισμός: Έστω Y υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

i. Ο αριθμός a είναι το **ελάχιστο άνω φράγμα** του Y (**supremum**) αν ισχύουν:
   - Ο a είναι ένα άνω φράγμα του Y.
   - Ο a είναι μικρότερος ή ίσος από κάθε άλλο αριθμό b που είναι επίσης ένα άνω φράγμα του Y ($a \le b$).
   - Γράφουμε $a = \sup Y$.

ii. Ο αριθμός a είναι το **μέγιστο κάτω φράγμα** του Y (**infimum**) αν ισχύουν:
   - Ο a είναι ένα κάτω φράγμα του Y.
   - Ο a είναι μεγαλύτερος ή ίσος από κάθε άλλο αριθμό b που είναι επίσης ένα κάτω φράγμα του Y ($a \ge b$).
   - $a = \inf Y$.

Οι αριθμοί supremum και infimum ενός συνόλου Y αν υπάρχουν είναι μοναδικοί.

Αξίωμα: Πληρότητα των πραγματικών αριθμών

- Αν Y είναι ένα μη κενό υποσύνολο πραγματικών αριθμών και είναι άνω φραγμένο, τότε το Y έχει supremum.
- Αν Y είναι ένα μη κενό υποσύνολο πραγματικών αριθμών και είναι κάτω φραγμένο, τότε το Y έχει infimum.

Βασική προϋπόθεση αποτελεί το εξεταζόμενο σύνολο να είναι διαφορετικό από το κενό. Έστω $Y = \varnothing$, τότε κάθε αριθμός είναι ένα άνω φράγμα, άρα αποκλείεται να έχει sup.

Παράδειγμα 1.3: Να υπολογιστούν στην περίπτωση που υπάρχουν το supremum, infimum, μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο των συνόλων.

i. $A = \{x \in \Re : x \le 3\}$

Το σύνολο $A = \{x \in \Re : x \le 3\}$ έχει supremum το οποίο είναι ίσο με 3. Επειδή $\sup A = 3$ και ανήκει στο σύνολο A, το μέγιστο άνω φράγμα ταυτίζεται με το max του συνόλου. Άρα $\sup A = \max\ A = 3$.

ii. $B = \{x \in \mathbb{Q}_+^* : x^2 > 9\}$

Το σύνολο $B = \{x \in \mathbb{Q}_+^* : x^2 > 9\} = \{x \in \mathbb{Q}_+^* : 3 < x < +\infty\}$ έχει infimum και συγκεκριμένα $\inf B = 3$. Το σύνολο B δεν έχει minimum.

iii. $K=\left\{x\in\mathbb{Q}_{-}^{*}:x^{2}<4\right\}$

Το σύνολο $K=\left\{x\in\mathbb{Q}_{-}^{*}:x^{2}<4\right\}=\left\{x\in\mathbb{Q}_{-}^{*}:-2<x<0\right\}$ έχει infimum και supremum. $\inf B=-2$ και $\sup B=0$. Το σύνολο B δεν έχει minimum και maximum.

iv. $\Gamma=\left\{x>0:0<x^{2}-1\leq 2\right\}$

Το σύνολο $\Gamma=\left\{x>0:0<x^{2}-1\leq 2\right\}$ αν χωρίσουμε τις ανισότητες γράφεται ως εξής:

$\Gamma=\left\{x>0:0<x^{2}-1 \text{ και } x^{2}-3\leq 0\right\}=\left\{x>0:1<x \text{ και } 0<x\leq\sqrt{3}\right\}=$

$=\left\{x>0:1<x\leq\sqrt{3}\right\}=\left(1,\sqrt{3}\right]$

Άρα έχει supremum, $\sup\Gamma=\sqrt{3}$ και επειδή το $\sup\Gamma\in\Gamma$, ταυτίζεται με το $\max\Gamma$.

Έχει μέγιστο κάτω φράγμα, $\inf\Gamma=1$, δεν έχει όμως min.

Ασκήσεις για εξάσκηση

Ασκήσεις με τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και τη διάταξη

1. Να δειχθούν οι ισότητες:
   i. $(-1)\cdot a=-a$ για κάθε $a\in\Re$
   ii. $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$ για κάθε $a\in\Re-\{0\}$

2. Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:
   i. Αν $a<b$ και $c<d$, να αποδείξετε ότι $a-c<b-d$
   ii. Αν $0<a<1$, τότε $a^{2}<a$
   iii. Αν $a>0$, τότε $a^{-1}>0$

3. Αν $a,b\in\mathbb{Z}_{+}^{*}$ να συγκρίνετε τους $\dfrac{a-2}{b}$ και $\dfrac{2-b}{a}-\dfrac{2}{ab}$

4. Αν $a,b\in\Re^{*}$ είναι ομόσημοι και $a>b$ τότε $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2$

5. Αν $a,b\in\Re^{*}$ είναι ετερόσημοι και $a>b$ τότε $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\leq -2$

6. Αν $a>1>b$ να αποδείξετε ότι $a+b>1+a\cdot b$

7. Αν $a>-1$ να αποδείξετε ότι $a^{3}+1>a^{2}+a$

Ασκήσεις σχετικά με τα φράγματα συνόλων

8. Να υπολογιστούν στην περίπτωση που υπάρχουν το supremum, infimum, μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο των συνόλων:
   i. $\{x \in \Re : 0 < x < 1\}$
   ii. $\left\{x \in \Re : 0 \le x \le \sqrt{2}\right\}$
   iii. $\left\{x \in \Re : x^2 + x - 1 < 0\right\}$
   iv. $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \ldots\right\}$
   v. $\left\{\frac{1}{n} : n \ne 0, n \in \mathbb{Z}\right\}$

9. Να αποδείξετε ότι το supremum και το infimum ενός συνόλου ορίζονται μονοσήμαντα.

10. Έστω $A \ne \varnothing$ υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για το οποίο ισχύει $\sup A$ $A = \inf A$. Να δειχθεί ότι το A είναι μονοσύνολο.

«*Το μυστηριώδες 3,14159... που τρυπώνει από*
κάθε πόρτα και παράθυρο
και από κάθε καμινάδα».
August de Morgan

Πηγή: Μπλάτνερ, Ν., *Η χαρά του π*, σελ. 43.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Συναρτήσεις

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η εκμάθηση των εννοιών της συνάρτησης, της αντιστοιχίας και του διατεταγμένου ζεύγους, η εξέταση των χαρακτηριστικών συναρτήσεων και οι ιδιότητές τους (π.χ. μονοτονία και φράγματα) όπως και η εισαγωγή στις οικονομικές συναρτήσεις.

2.1 Η έννοια της συνάρτησης

Η «συνάρτηση» στα μαθηματικά σχετίζεται με τις έννοιες της απεικόνισης, του κανόνα, του πεδίου ορισμού, του συνόλου τιμών.

Μια αρχική *προσέγγιση* της έννοιας της συνάρτησης αφορά στον «κανόνα» που αντιστοιχίζει κάποιον αριθμό σε κάποιον άλλο αριθμό. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, πρόκειται για τον κανόνα που αντιστοιχίζει κάποιον πραγματικό αριθμό σε κάποιον άλλο πραγματικό αριθμό.

Για παράδειγμα, ο κανόνας που αντιστοιχίζει κάθε αριθμό στον αντίστροφό του

$$x \to \frac{1}{x}$$

$$3 \to \frac{1}{3}$$

Στο τέλος του συγκεκριμένου κεφαλαίου θα έχεις μάθει τι είναι:

- Πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής
- Χαρακτηριστικές συναρτήσεις
- Πράξεις με συναρτήσεις
- Αντίστροφη συνάρτηση
- Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς

$7 \to \frac{1}{7}$

...

$1000 \to \frac{1}{1000}$

Μια συνάρτηση συμβολίζεται με ένα γράμμα, συνήθως χρησιμοποιούμε τα γράμματα f, g, h.

Ο αριθμός που η f αντιστοιχίζει τον αριθμό x συμβολίζεται με y και ονομάζεται τιμή της συνάρτησης ή εικόνα της συνάρτησης. Η x ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και η y ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε λοιπόν

$f(x) = \frac{1}{x}$ και η μεταβλητή x δεν επιτρέπεται να πάρει την τιμή μηδέν.

Αυτός ο πρώτος περιορισμός που θέτουμε οδηγεί στην ανάγκη προσδιορισμού του συνόλου των πραγματικών αριθμών, από το οποίο η μεταβλητή μιας συνάρτησης μπορεί να λαμβάνει τιμές, δηλαδή οδηγεί στον καθορισμό του **πεδίου ορισμού** της συνάρτησης.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{x^2+6}{x^2-1}, x \neq 1, -1$, το πεδίο ορισμού της είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί εκτός από $+1, -1$ δηλαδή $A = \Re - \{-1, 1\}$.

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης το συμβολίζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα, π.χ. A. Πολύ συχνά χρησιμοποιούμε το σύμβολο $D(f)$.

Το σύνολο όλων των τιμών της συνάρτησης ονομάζεται **σύνολο τιμών** και το συμβολίζουμε με $R(f)$.

$$R(f) = \{y \mid y = f(x), \forall x \in D(f)\}$$

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μια συνάρτηση μπορεί να έχει διαφορετικό τύπο, ανάλογα με το σύνολο από το οποίο μπορεί να παίρνει τιμές η μεταβλητή x. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \begin{cases} 0 & x \in \Re - \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης είναι το $\Re$, ενώ το σύνολο τιμών της αποτελείται από δύο μόνο στοιχεία και είναι το $R(h) = \{0, 1\}$.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι το σύνολο τιμών δεν ταυτίζεται πάντα με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για την $h(x)$ το σύνολο τιμών της είναι το $\{0, 1\}$. Παρομοίως στο παράδειγμα της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ το σύνολο τιμών είναι το $R(f) = \{x \in \Re - \{0\} \mid 1/x\} \equiv \{\ldots, -1/2, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$.

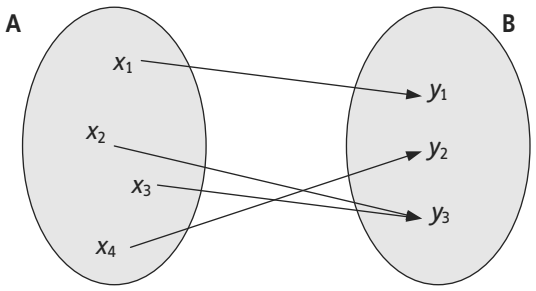
Με βάση τα παραπάνω οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A (υποσύνολο των πραγματικών αριθμών) είναι μια αντιστοιχία που κάθε $x \in A$ το αντιστοιχίζει ακριβώς σ' έναν πραγματικό αριθμό y. Το μοναδικό αυτό y λέγεται εικόνα του x μέσω της f και γράφεται ως $y = f(x)$.

Η αντιστοίχιση αυτή συμβολίζεται ως $f : A \to \Re$.

Έστω μια συνάρτηση $f : A \subseteq \Re \to B \subseteq \Re$. Πρόκειται για μια πραγματική συνάρτηση, πραγματικής μεταβλητής, αφού τα σύνολα A και B είναι υποσύνολα των πραγματικών αριθμών.

Σχηματικά η έννοια της συνάρτησης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



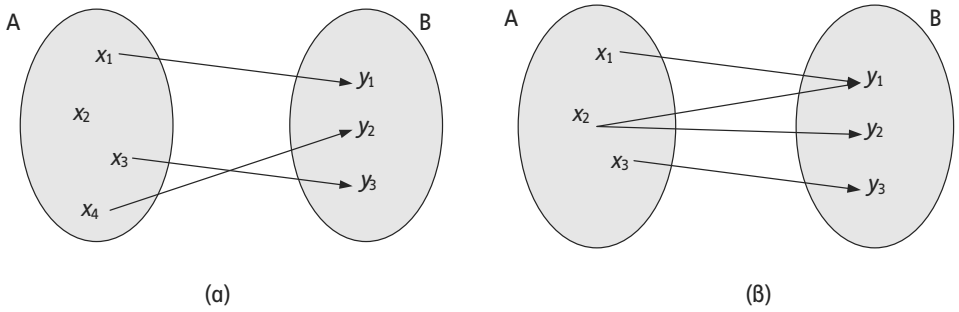
Σχήμα 2.1: Συνάρτηση

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $R(f)$ μπορεί να είναι και υποσύνολο του B, δηλαδή $R(f) \subseteq B \subseteq \Re$. Στην περίπτωση όπου το $R(f) \equiv B \subseteq \Re$, τότε η συνάρτηση λέγεται **επί**.

π.χ. $f : [1,3] \to [1,16], f(x) = x^2$, τότε το σύνολο τιμών $R(f) = [1,9] \subset [1,16]$

αν $f : [2,5] \to [4,25], f(x) = x^2$, τότε το σύνολο τιμών $R(f) = [4,25]$, άρα η συνάρτηση είναι επί.

Σημείωση: Με βάση όσα αναφέραμε παραπάνω, για να είναι μια αντιστοιχία συνάρτηση δεν μπορεί να υπάρχουν στοιχεία από το πεδίο ορισμού A που να μην αντιστοιχίζονται σε μοναδικό στοιχείο του συνόλου B [Σχήμα 2.2(α) το x_2 δεν αντιστοιχίζεται πουθενά], ούτε μπορεί να υπάρχει στοιχείο του συνόλου A που να αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου B [Σχήμα 2.2(β) το x_2 αντιστοιχίζεται στο y_1 και στο y_2].



Σχήμα 2.2: Αντιστοιχίσεις που δεν είναι συναρτήσεις

Παράδειγμα 2.1: Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{|x|+1}$.

Πεδίο ορισμού: $D(f)=\Re$, αφού $|x|+1\neq 0, \forall x\in\Re$.

Για να προσδιοριστεί το σύνολο τιμών θέτω $y=\dfrac{x}{|x|+1}$ και θα λύσω ως προς x. Επειδή υπάρχει το απόλυτο του x διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Αν $x\geq 0 \Rightarrow |x|=x$

$$y=\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}\geq 0 \overset{\mu\varepsilon\, y\neq 1}{\Leftrightarrow} y(1-y)\geq 0 \text{ και } y\neq 1 \Leftrightarrow y\in[0,1)$$

	$-\infty$	0	1 $+\infty$
y	−	+	+
$1-y$	+	+	−
$y(1-y)$	−	+	−

- Αν $x<0 \Rightarrow |x|=-x$

$$y=\frac{x}{1-x}\Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}<0 \overset{\mu\varepsilon\, y\neq -1}{\Leftrightarrow} y(1+y)<0 \text{ και } y\neq -1 \Leftrightarrow y\in(-1,0]$$

	$-\infty$	-1	0 $+\infty$
y	−	−	+
$1-y$	−	+	+
$y(1-y)$	+	−	+

Άρα $R(f)=(-1,0]U[0,1)\equiv(-1,1)$

Παράδειγμα 2.2: Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-1}$

Πεδίο ορισμού: $D(f)=\{x\in\Re : x^2-1\neq 0\}=\Re-\{-1,1\}$

Για να προσδιοριστεί το σύνολο τιμών θέτω $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-1}$ και λύνουμε ως προς x

$$y=\frac{x^2+2x+3}{x^2-1}\Rightarrow (y-1)x^2-2x-(3+y)=0.$$

Προέκυψε μια παραμετρική δευτεροβάθμια εξίσωση. Εξετάζουμε τις τιμές της παραμέτρου y για να επιλύσουμε την εξίσωση.

- Αν $y=1$, η εξίσωση γίνεται πρωτοβάθμια και συγκεκριμένα $-2x-(3+1)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x=-4\Leftrightarrow x=-2$, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και συνεπώς $1\in R(f)$ (1)
- Αν $y\neq 1$, λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση.

Για να έχει λύσεις απαιτούμε $\Delta\geq 0\Rightarrow x\in\Re$

$\Delta=(-2)^2-4(y-1)(-(3+y))=4(y^2+2y-2)\geq 0$

Η διακρίνουσα είναι επίσης μια δευτεροβάθμια εξίσωση, τις ρίζες της οποίας τις υπολογίζω κατά τα γνωστά:

$\Delta'=(2)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=12$, οπότε

$$y_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{-2+\sqrt{12}}{2}=-1+\sqrt{3}\\[2ex] \dfrac{-2-\sqrt{12}}{2}=-1-\sqrt{3}\end{cases}$$

Το y^2+2y-2 που είναι η διακρίνουσα της παραμετρικής εξίσωσης είναι ομόσημη του συντελεστή του x^2 εκτός των ριζών. Άρα είναι θετική εκτός των ριζών και αρνητική εντός. Άρα $y\in\left(-\infty,-1-\sqrt{3}\right]\cup\left[-1+\sqrt{3},\infty\right)$ (2)

Άρα από (1) και (2) $R(f)=\left(-\infty,-1-\sqrt{3}\right]\cup\left[-1+\sqrt{3},\infty\right)$

2.2 Πράξεις με συναρτήσεις

Έστω οι συναρτήσεις f και g με $f:A\to\Re$ και $g:B\to\Re$. Μπορούμε να ορίσουμε (1) μια νέα συνάρτηση $f+g$ που λέγεται **άθροισμα** συναρτήσεων και ισχύει

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ \text{ με } D(f+g)=A\cap B$$

(2) μια νέα συνάρτηση $(f \bullet g)$ που λέγεται **γινόμενο** συναρτήσεων και ισχύει

$$(f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x) \text{ με } D(f \bullet g) = A \cap B$$

(3) μια νέα συνάρτηση $\frac{f}{g}$ που λέγεται **πηλίκο** συναρτήσεων και ισχύει

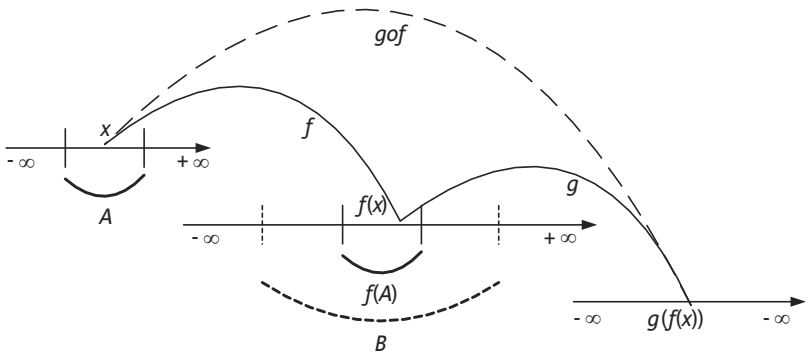
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ με } D\left(\frac{f}{g}\right) = A \cap B \cap \{x : g(x) \neq 0\}$$

Παρατήρηση: Ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες του αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου για περισσότερες από δύο συναρτήσεις, δηλαδή

- $(f+g)+h = f+(g+h)$
- $f+g = g+f$
- $(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$

(4) Αν f και g συναρτήσεις, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $g \circ f$ που λέγεται **σύνθεση** των συναρτήσεων f και g και ισχύει $(g \circ f)(x) = g \circ (f(x))$ με $D(g \circ f)(x) = \{x : x \in D(f) \text{ και } f(x) \in D(g)\}$

Στο Σχήμα 2.3 φαίνεται ότι το τυχαίο στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται με τη βοήθεια της f στο $f(x)$ $(f(x) \in f(A) \subseteq B)$ και το $f(x)$ αντιστοιχίζεται με τη βοήθεια της g στο $g(f(x)) \in \Re$.



Σχήμα 2.3: Σύνθετη συνάρτηση

Προσοχή: $g \circ f \neq f \circ g$

Συγκεκριμένα

$(g \circ f)(x) = g \circ (f(x))$ με $D(g \circ f)(x) = \{x : x \in D(f) \text{ και } f(x) \in D(g)\}$ ενώ

$(f \circ g)(x) = f \circ (g(x))$ με $D(f \circ g)(x) = \{x : x \in D(g)$ και $g(x) \in D(f)\}$

Παράδειγμα 2.3: Έστω οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ και $g(x) = \dfrac{1}{1-|x|}$

i. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τιμών.
ii. Να εξεταστεί αν ορίζεται η $g \circ f$ και αν ναι να προσδιοριστεί.

Το πεδίο ορισμού της f είναι $D(f) = \Re$
Το πεδίο ορισμού της g είναι $D(g) = \Re - \{-1,1\}$

Για τον υπολογισμό του συνόλου τιμών της f, δεν θα χρησιμοποιήσω τον κλασικό τρόπο, όπου θέτω $\dfrac{1}{1+|x|} = y$ και λύνω ως προς x, αλλά θα παρατηρήσουμε ότι $|x| \geq 0 \Leftrightarrow 1+|x| \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+|x|} \leq 1$

Άρα $0 \leq \dfrac{1}{1+|x|} \leq 1$, δηλαδή $R(f) = [0,1]$

Για τον υπολογισμό του συνόλου τιμών της g, θέτω $\dfrac{1}{1-|x|} = y$ και λύνω ως προς x.

Επειδή υπάρχει και πάλι το $|x|$ διακρίνω δύο περιπτώσεις.

- Αν $x < 0$, τότε $|x| = -x$ και έχουμε $\dfrac{1}{1+x} = y$. Για να έχει νόημα το κλάσμα πρέπει $x \neq -1$. Λύνοντας ως προς x έχουμε $1 = y + y \cdot x \Leftrightarrow \dfrac{1-y}{y} = x$ με $y \neq 0$, αν $y = 0$ δεν ορίζεται.
- Αν $x > 0$, τότε $|x| = x$ και έχουμε $\dfrac{1}{1-x} = y$. Για να έχει νόημα το κλάσμα πρέπει $x \neq 1$. Λύνοντας ως προς x έχουμε $1 = y - y \cdot x \Leftrightarrow \dfrac{y-1}{y} = x$ με $y \neq 0$, αν $y = 0$ δεν ορίζεται.

Από τα παραπάνω προκύπτει:

- Αν $y = 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη
- Αν $y \neq 0$, τότε $\dfrac{1-y}{y} = x$ για $x > 0$ και $x \neq -1$ και $\dfrac{y-1}{y} = x$ για $x < 0$ και $x \neq 1$