# Περιεχόμενα


Ευχαριστίες ..... 16
Δύο λόγια από τη συγγραφέα ..... 17

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών** ..... 19
1.1 Σύνολα αριθμών ..... 19
1.2 Αλγεβρική δομή του $\mathfrak{R}$ ..... 20
1.2.1 Ιδιότητες πρόσθεσης ..... 20
1.2.2 Ιδιότητες πολλαπλασιασμού ..... 20
1.2.3 Ιδιότητες διάταξης ..... 21
1.2.4 Βοηθητικές προτάσεις ..... 22
1.3 Πληρότητα πραγματικών αριθμών ..... 23
Ασκήσεις για εξάσκηση ..... 27

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Συναρτήσεις** ..... 29
2.1 Η έννοια της συνάρτησης ..... 29
2.2 Πράξεις με συναρτήσεις ..... 33
2.3 Χαρακτηριστικές συναρτήσεις ..... 39
2.4 Αντίστροφη συνάρτηση ..... 42
2.5 Γραμμικές και μη γραμμικές συναρτήσεις ..... 47
2.5.1 Γραμμικές συναρτήσεις ..... 47
2.5.2 Μη γραμμικές συναρτήσεις ..... 49
2.5.2.1 Τετραγωνικές συναρτήσεις ..... 49
2.5.2.2 Κυβικές συναρτήσεις ..... 51
2.6 Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις ..... 53
2.6.1 Εκθετική συνάρτηση ..... 53
2.6.2 Λογαριθμική συνάρτηση ..... 55
2.7 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις ..... 56
2.7.1 Βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις ..... 56
2.7.2 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις ..... 60
2.8 Συνάρτηση ζήτησης και προσφοράς ..... 63
2.8.1 Γραμμική συνάρτηση ζήτησης ..... 63
2.8.2 Γραμμική συνάρτηση προσφοράς ..... 64
2.8.3 Ισορροπία της αγοράς ..... 65
2.8.4 Συνάρτηση κατανάλωσης ..... 67
2.9 Τετραγωνικές οικονομικές συναρτήσεις ..... 68
2.9.1 Τετραγωνικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης ..... 68
2.9.2 Τετραγωνική συνάρτηση κόστους ..... 69
2.10 Κυβικές οικονομικές συναρτήσεις ..... 71
2.10.1 Η κυβική συνάρτηση κόστους ..... 71
2.11 Το υπόδειγμα του εθνικού εισοδήματος ..... 72
Ασκήσεις για εξάσκηση ..... 73

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Όρια και συνέχεια συναρτήσεων** ..... 75
3.1 Έννοια ορίου συνάρτησης ..... 75
3.2 Υπολογισμός ορίων ..... 80
3.2.1 Βασικά θεωρήματα ..... 80
3.2.2 Πλευρικά όρια ..... 82
3.3 Πεπερασμένα όρια στο άπειρο και άπειρα όρια ..... 84
3.3.1 Πεπερασμένα όρια στο άπειρο ..... 84
3.3.1.1 Πράξεις με πεπερασμένα όρια στο άπειρο ..... 85
3.3.2 Άπειρα όρια ..... 86
3.4 Συνέχεια συναρτήσεων ..... 87
3.4.1 Η έννοια της συνέχειας ..... 87
3.4.2 Χαρακτηριστικές συνεχείς συναρτήσεις ..... 92
3.4.3 Σημαντικά θεωρήματα της συνέχειας ..... 93
Ασκήσεις για εξάσκηση ..... 98

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Ακολουθίες, σειρές και χρηματοοικονομικές μεταβολές** ..... 101
4.1 Η έννοια της ακολουθίας ..... 101
4.2 Όρια ακολουθιών και σύγκλιση ..... 103
4.3 Χαρακτηριστικές ιδιότητες ακολουθιών ..... 107
4.4 Η έννοια της υπακολουθίας ..... 113
4.5 Αποκλίνουσες ακολουθίες ..... 114
4.6 Σημαντικά όρια χωρίς αποδείξεις ..... 114
4.7 Το θεώρημα μεταφοράς ..... 115
4.8 Σειρές ..... 117
4.8.1 Αριθμητική και γεωμετρική σειρά ..... 117
4.9 Η έννοια των σειρών στο μοντέλο εθνικού εισοδήματος ..... 121
4.10 Απλό επιτόκιο και επιτόκιο ανατοκισμού ..... 122
4.11 Παρούσα αξία προεξόφλησης ..... 124
4.11.1 Παρούσα αξία μελλοντικών πληρωμών ..... 125
4.11.2 Αποπληρωμή δανείου ..... 126
Ασκήσεις για εξάσκηση ..... 128

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Παράγωγος συνάρτηση** ..... 133
5.1 Η έννοια του ρυθμού μεταβολής ..... 133
5.2 Η έννοια της παραγώγου ..... 135
5.2.1 Ορισμός παραγώγου ..... 137
5.2.2 Πλευρικές παράγωγοι ..... 140
5.2.3 Παραγωγισιμότητα και συνέχεια ..... 142
5.2.4 Η παράγωγος στην οικονομική επιστήμη ..... 144
5.3 Κανόνες παραγώγισης ..... 144
5.3.1 Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης ..... 147
5.3.1.1 Κανόνας αλυσίδας ..... 147
5.3.2 Κανόνας παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης ..... 148
5.3.3 Κανόνες παραγώγισης τριγωνομετρικών συναρτήσεων ..... 151
5.3.4 Κανόνες παραγώγισης λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων ..... 154

5.3.4.1 Εκθετική συνάρτηση ... 154
5.3.4.2 Λογαριθμική συνάρτηση ... 155
5.4 Διαφορικό συνάρτησης ... 158
5.4.1 Διαφορικά ανώτερων τάξεων ... 160
5.4.2 Διακριτός και συνεχής ρυθμός αύξησης οικονομικών μεγεθών ... 161
5.5 Η παράγωγος ως εργαλείο χαρακτηρισμού μονοτονίας συναρτήσεων ... 165
5.6 Ακρότατα συνάρτησης ... 168
5.6.1 Συνέχεια και ακρότατα ... 173
5.6.2 Μεθοδολογία εύρεσης ακροτάτων ... 174
5.7 Η δεύτερη παράγωγος ως εργαλείο χαρακτηρισμού σημείων γραφικής παράστασης ... 178
5.8 Βασικά θεωρήματα παραγωγίσιμων συναρτήσεων ... 185
5.9 Απροσδιόριστες μορφές ... 193
5.10 Ασύμπτωτες ευθείες συνάρτησης ... 198
5.11 Μελέτη συνάρτησης ... 199
5.12 Μερικά παραδείγματα ακόμη ... 203
Ασκήσεις για εξάσκηση ... 204

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. Παράγωγοι και οικονομικές συναρτήσεις ... 211**
6.1 Παράγωγος και οικονομικές συναρτήσεις κόστους ... 211
6.1.1 Μέσο κόστος ... 211
6.1.2 Οριακό κόστος ... 213
6.1.3 Σχέση ανάμεσα σε μέσο κόστος και οριακό κόστος ... 214
6.2 Παράγωγος και συναρτήσεις εσόδων ... 220
6.2.1 Συνολικά και οριακά έσοδα ... 220
6.2.1.1 Συνολικά έσοδα σε καθεστώς μονοπωλίου ... 220
6.2.1.2 Οριακά έσοδα σε καθεστώς μονοπωλίου ... 222
6.2.2 Σχέση ανάμεσα σε συνολικά και οριακά έσοδα ... 223
6.2.3 Σχέση ανάμεσα σε συνολικά και οριακά έσοδα σε καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού 229
6.3 Μεγιστοποίηση κέρδους ... 230
6.3.1 Μεγιστοποίηση κέρδους σε καθεστώς μονοπωλίου ... 230
6.3.2 Μεγιστοποίηση κέρδους σε καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού ... 233
6.4 Ισορροπία αγοράς σε καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού και μονοπωλίου ... 234
6.5 Ελαστικότητα ... 236
6.5.1 Τοξοειδής ελαστικότητα προσφοράς ... 236
6.5.2 Σημειακή ελαστικότητα προσφοράς ... 238
6.5.3 Τοξοειδής ελαστικότητα ζήτησης ... 239
6.5.4 Σημειακή ελαστικότητα ζήτησης ... 240
6.5.6 Ελαστικότητα ζήτησης, οριακά έσοδα εταιρείας και κανόνας παραγώγισης αλυσίδας ... 242
6.5.7 Ελαστικότητα ζήτησης σε αγορά τέλειου ανταγωνισμού ... 244
6.5.8 Ελαστικότητα συνάρτησης ολικού κόστους ... 247
6.5.9 Ελαστικότητα συνάρτησης ολικής κατανάλωσης ... 248
Ασκήσεις για εξάσκηση ... 250

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. Ολοκληρωτικός λογισμός ... 253**
7.1 Η έννοια του αόριστου ολοκληρώματος ... 253

7.2 Στοιχειώδη αόριστα ολοκληρώματα ... 254
7.3 Κανόνες ολοκλήρωσης αόριστου ολοκληρώματος ... 255
7.4 Τεχνικές ολοκλήρωσης ... 257
7.4.1 Τεχνική 1: Παραγοντική ολοκλήρωση ... 257
7.4.2 Τεχνική 2: Μέθοδος αντικατάστασης ... 258
7.4.3 Τεχνική 3: Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων ... 259
7.4.4 Τεχνική 4: Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και αντικατάσταση ... 264
7.4.5 Τεχνική 5: Αναγωγικοί τύποι ... 265
7.5 Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος ή αλλιώς του ολοκληρώματος Riemann ... 266
7.6 Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων ... 270
7.7 Θεμελιώδη θεωρήματα απειροστικού λογισμού ... 272
7.8 Ο ολοκληρωτικός λογισμός στην οικονομική επιστήμη ... 277
Ασκήσεις για εξάσκηση ... 282

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας** ... 287
8.1 Οι έννοιες του γραμμικού ή διανυσματικού χώρου ... 287
8.2 Η έννοια του πίνακα και είδη πινάκων ... 290
8.3 Πράξεις με πίνακες ... 294
8.4 Ορίζουσες πινάκων ... 297
8.5 Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα ... 306
8.6 Γραμμικά συστήματα εξισώσεων ... 308
8.6.1 Επίλυση γραμμικών συστημάτων ... 309
8.7 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ... 314
8.8 Διαγωνίσιμοι πίνακες ... 316
8.9 Εφαρμογή πινάκων στη μακροοικονομική ... 318
8.9.1 Το μοντέλο του εθνικού εισοδήματος ... 318
8.9.2 Το μοντέλο του εισοδήματος σε κλειστή οικονομία ... 320
8.9.3 Το μοντέλο των εισροών και εκροών ... 323
Ασκήσεις για εξάσκηση ... 325

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών** ... 329
9.1 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και η έννοια του n-διάστατου χώρου ... 329
9.2 Ισοσταθμικές καμπύλες ... 332
9.3 Όρια και συνέχεια συναρτήσεων πολλών μεταβλητών ... 333
9.4 Μερικές παράγωγοι συναρτήσεων πολλών μεταβλητών ... 338
9.5 Παράγωγοι ανώτερης τάξης ... 344
9.5.1 Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης ... 344
9.5.2 Μεικτές μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης ... 346
9.6 Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης ... 349
9.7 Ολικό διαφορικό συνάρτησης ... 351
9.8 Πεπλεγμένες συναρτήσεις ... 353
9.8.1 Μερικές παράγωγοι πεπλεγμένων συναρτήσεων και ιακωβιανή ορίζουσα ... 358
9.9 Ακρότατα και σαγματικά σημεία συνάρτησης ... 362
9.10 Μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange ... 370
Ασκήσεις για εξάσκηση ... 371

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10. Οικονομικές εφαρμογές συναρτήσεων πολλών μεταβλητών** ..... 377
10.1 Η συνάρτηση παραγωγής ..... 377
10.1.1 Οριακός βαθμός υποκατάστασης ..... 379
10.1.2 Οριακό προϊόν εργασίας ..... 380
10.1.2.1 Νόμος φθινουσών αποδόσεων παραγωγικότητας ..... 381
10.1.2.2 Μέση παραγωγικότητα εργασίας ..... 381
10.1.3 Ψευδο-βραχυπρόθεσμη συνάρτηση παραγωγής ..... 382
10.1.4 Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas ..... 384
10.1.5 Χαρακτηριστικά της συνάρτησης παραγωγής ..... 384
10.1.5.1 Η κλίση της ισοσταθμικής καμπύλης ποσότητας ..... 384
10.1.5.2 Η κυρτότητα της ισοσταθμικής καμπύλης ποσότητας ..... 385
10.2 Η συνάρτηση χρησιμότητας ..... 386
10.2.1 Χαρακτηριστικά της συνάρτησης χρησιμότητας ..... 388
10.2.1.1 Η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας ..... 388
10.2.1.2 Η κυρτότητα της καμπύλης αδιαφορίας ..... 389
10.3 Ισορροπία αγοράς και πολλαπλασιαστής Keynes ..... 391
10.3.1 Πολλαπλασιαστής Keynes ..... 391
10.3.2 Η καμπύλη επενδύσεων IS ..... 392
10.4 Ελαχιστοποίηση κόστους ..... 393
10.5 Μεγιστοποίηση κέρδους ..... 396
10.6 Μεγιστοποίηση χρησιμότητας από καταναλωτή ..... 397
10.7 Απόδοση κλίμακας ..... 400
10.8 Ομογενείς συναρτήσεις ..... 401
10.8.1 Ιδιότητες ομογενών συναρτήσεων ..... 402
10.9 Μερική ελαστικότητα ..... 404
10.9.1 Μερική ελαστικότητα ζήτησης ..... 405
10.9.2 Ελαστικότητα υποκατάστασης ..... 406
Ασκήσεις για εξάσκηση ..... 407

Βιβλιογραφία ..... 411
Ευρετήριο όρων ..... 413
Γλωσσάρι ..... 417