

## Εισαγωγή

Το βιβλίο αυτό είναι καρπός της συνεργασίας ενός μαθηματικού και ενός παιδο-νευροψυχολόγου που ενδιαφέρονται για τις μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (ΜΔΜ) και τη Δυσαριθμωσία. Η επαγγελματική σταδιοδρομία και των δύο συνδυάζει την επιστημονική έρευνα και το ενδιαφέρον για την κλινική και εκπαιδευτική πράξη.

Στόχος αυτού του βιβλίου είναι να χτίσει γέφυρες μεταξύ, αφενός, όσων η γνωστική ψυχολογία και οι νευροεπιστήμες έχουν καταφέρει να αναδείξουν σχετικά με την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων των παιδιών και τις δυσκολίες που συνδέονται με αυτή την ανάπτυξη και, αφετέρου, της διδασκαλίας των μαθηματικών στην πράξη σε παιδιά με ή χωρίς δυσκολίες στα μαθηματικά. Απευθύνεται σε οποιονδήποτε δουλεύει με παιδιά που δυσκολεύονται στα μαθηματικά είτε αυτά έχουν διαγνωστεί με ΜΔΜ-Δυσαριθμωσία είτε όχι. Μπορεί να είναι δάσκαλοι ή καθηγητές μαθηματικών, ειδικοί παιδαγωγοί, εκπαιδευτικοί ψυχολόγοι ή νευροψυχολόγοι, φοιτητές και ερευνητές.

Το βιβλίο αποτελείται από επτά κεφάλαια. Το **πρώτο κεφάλαιο** περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται οι μαθηματικές δεξιότητες, τις γνωστικές δεξιότητες στις οποίες εδράζονται, τις πηγές προέλευσης των ΜΔΜ-Δυσαριθμωσίας, την ετερογένεια των ατόμων με ΜΔΜ-Δυσαριθμωσία και την ανάγκη σκιαγράφησης εξατομικευμένων μαθηματικών γνωστικών προφίλ των μαθητών. Το **δεύτερο κεφάλαιο** κάνει μια ανασκόπηση των πιο αποτελεσματικών πρακτικών διδασκαλίας για μαθητές με ΜΔΜ-Δυσαριθμωσία και προτείνει τις βασικές κατευθύνσεις για τον σχεδιασμό εξατομικευμένων προγραμμάτων παρέμβασης ανάλογα με το μαθηματικό γνωστικό προφίλ κάθε μαθητή. Το **τρίτο κεφάλαιο** επικεντρώνεται στον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται οι βασικές μαθηματικές δεξιότητες, όπως η επεξεργασία συνόλου αντικειμένων κατά προσέγγιση, η απαρίθμηση, η μέτρηση και η απεικόνιση των φυσικών αριθμών σε αριθμογραμμή. Το **τέταρτο κεφάλαιο** πραγματεύεται τον τρόπο με τον οποίο ο ανθρώπινος νους αναπτύσσει και επεξεργάζεται τις συμβολικές αναπαραστάσεις των αριθμών δηλαδή των αριθμο-λέξεων (π.χ. δώδεκα) και των αραβικών αριθμών (π.χ. 12), τη μετα-κωδικοποίηση από τη μια αναπαράσταση του αριθμού στην άλλη και τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται το θεσιακό αριθμητικό σύστημα με βάση το 10. Το **πέμπτο κεφάλαιο** επικεντρώνεται στις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές προκειμένου να εκτελούν αριθμητικές πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Αφορά στην εκτέλεση πράξεων τόσο με το μυαλό (νοερά) όσο και στην εφαρμογή των γραπτών αλγόριθμων για υπολογισμούς με πολυψήφιους αριθμούς. Το **έκτο κεφάλαιο** εξετάζει τις διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης, ανάλογων ποσών και ποσοστών. Το **έβδομο κεφάλαιο** ασχολείται με τον τρόπο με τον οποίο

αντιλαμβάνονται οι μαθητές τους ρητούς αριθμούς (δηλαδή τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς) καθώς και με τις στρατηγικές εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων μεταξύ ρητών αριθμών.

Κάθε κεφάλαιο (με εξαίρεση τα δύο πρώτα) αποτελείται από ένα θεωρητικό και ένα πρακτικό μέρος. Το θεωρητικό μέρος περιλαμβάνει: α) την επεξήγηση των γνωστικών και μαθηματικών διαδικασιών που εμπλέκονται στην αντίστοιχη θεματική ενότητα και τον τρόπο που αυτές αναπτύσσονται, β) τις δυσκολίες και τις προκλήσεις που συναντώνται κατά την ανάπτυξη αυτή, ειδικά για τα παιδιά με ΜΔΜ-Δυσαριθμσία και γ) μια σύνθεση των ερευνητικών μελετών παρέμβασης που αποσκοπούν στην αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών. Το πρακτικό μέρος, το οποίο είναι και εκτενέστερο, περιλαμβάνει: α) τον τρόπο αξιολόγησης των αντίστοιχων μαθηματικών δεξιοτήτων ώστε να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό/ειδικό να εκτιμήσει αν είναι απαραίτητο ή όχι να παράσχει βοήθεια σε αυτό το επίπεδο στον μαθητή, αλλά και να είναι σε θέση να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα της παρέμβασης εφόσον χρειαστεί και β) ένα ολοκληρωμένο και διαφοροποιημένο πρόγραμμα διδασκαλίας/παρέμβασης για την ανάπτυξη των αντίστοιχων μαθηματικών δεξιοτήτων ανάλογα με το μαθηματικό γνωστικό προφίλ κάθε μαθητή. Οι πρακτικές διδασκαλίας με παράλληλη χρήση πληθώρας χειροπιαστών εποπτικών υλικών που προτείνονται βασίζονται στην επιστημονική γνώση που παρουσιάζεται στο θεωρητικό μέρος κάθε κεφαλαίου καθώς και στην κλινική εμπειρία των δύο συγγραφέων του βιβλίου και των συνεργατών τους ανά την υφήλιο.

Μέσω αυτού του βιβλίου, επιδιώκουμε να εξοπλίσουμε τους εκπαιδευτικούς και τους ειδικούς με τα απαραίτητα εργαλεία προκειμένου να παρεμβαίνουν έγκαιρα και αποτελεσματικά στα παιδιά που δυσκολεύονται στα μαθηματικά ή αντιμετωπίζουν ΜΔΜ-Δυσαριθμσίας, ώστε να τα βοηθούν να ξεπεράσουν ή να διαχειριστούν αποτελεσματικά τις δυσκολίες τους και να αγαπήσουν τα μαθηματικά μέσω των διαφοροποιημένων πρακτικών διδασκαλίας που παρουσιάζουμε σε αυτό το βιβλίο.

**Γιάννης Καραγιαννάκης & Marie-Pascale Noël**

## Ευχαριστίες

**Ο**ι συγγραφείς ευχαριστούν όλα τα παιδιά που συμμετείχαν στις μελέτες τους ή στις εξατομικευμένες κλινικές συνεδρίες παρέμβασης τα τελευταία χρόνια. Ευχαριστούν επίσης την Alice De Visscher για τη συμβολή της στη συγγραφή του Κεφαλαίου 5.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στην εκπαιδευτικό Anny Cooreman και στον εκπαιδευτικό οργανισμό Eureka στο Βέλγιο. Αρκετές από τις μεθόδους και τις ιδέες που παρουσιάζονται σε αυτό το βιβλίο είναι εμπνευσμένες από τη μεθοδολογία RekenTrapperS που έχει αναπτύξει η Anny Cooreman. Η μαθηματική μεθοδολογία RekenTrapperS χρησιμοποιείται στο σχολείο Eureka Leuven ως αποκλειστική μέθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών. Εφαρμόζεται για περισσότερα από 20 χρόνια και σε άλλα σχολεία, από επαγγελματίες και από οικογένειες στο σπίτι για την αποκατάσταση δυσκολιών στα μαθηματικά. Ο Δρ. Γιάννης Καραγιαννάκης έχει συνεργαστεί για αρκετά χρόνια με τον εκπαιδευτικό οργανισμό Eureka και έχει μοιραστεί με την κυρία Anny Cooreman αποτελεσματικές πρακτικές παρεμβάσεων στα μαθηματικά.

Τέλος, η Dr. Marie-Pascale Noël ευχαριστεί το Εθνικό Ίδρυμα Έρευνας του Βελγίου για την οικονομική υποστήριξη του.



# 1

## Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά – Δυσαριθμσία

### 1.1 Ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων

Μέχρι να ολοκληρώσουν το δημοτικό, τα παιδιά αναμένεται να αποκτήσουν μια σειρά μαθηματικών δεξιοτήτων, ιδίως στους τομείς της αριθμητικής και των βασικών εννοιών της γεωμετρίας (π.χ. NCTM, 2000· OECD, 2010· Stacey & Turner, 2015). Πολλές μελέτες έχουν επικεντρωθεί στον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται οι αριθμητικές δεξιότητες των παιδιών, και ιδιαίτερα στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Αν και η τυπική εκμάθηση των μαθηματικών ξεκινά στην αρχή του δημοτικού σχολείου (στην ηλικία των 6 ετών σε πολλές χώρες, συμπεριλαμβανομένης της Ελλάδας), στην ουσία έχει αρχίσει να οικοδομείται από τη βρεφική κιόλας ηλικία.

Μελέτες σε βρέφη έχουν δείξει πως ο ανθρώπινος νους είναι ήδη εξοπλισμένος με δύο προ-λεκτικά συστήματα για τον προσδιορισμό αριθμητικών ποσοτήτων: το **προσεγγιστικό αριθμητικό σύστημα (approximate number system)**, και το **σύστημα εντοπισμού αντικειμένων (object tracking system)**. Το πρώτο υποστηρίζει την εκτίμηση του αριθμητικού μεγέθους ενός συνόλου αντικειμένων, χωρίς να βασίζεται στη γλώσσα ή σε σύμβολα (Halberda & Feigenson, 2008· Wood & Spelke, 2005), ενώ το δεύτερο επιτρέπει τη νοερή παρακολούθηση αντικειμένων καθώς κινούνται στον χώρο (π.χ. Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004) και αποτελεί τη βάση για τον άμεσο καθορισμό περιορισμένου πλήθους (1 έως 4) αντικειμένων (Piazza et al., 2010). Παρομοίως, η γνώση της γεωμετρίας θεωρείται ότι βασίζεται σε τουλάχιστον δύο διαφορετικά βασικά γνωστικά συστήματα (Spelke, Lee & Izard, 2010): το πρώτο χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση διατάξεων και σχημάτων μεγάλης κλίμακας, και το δεύτερο αναπαριστά κινούμενες μορφές μικρής κλίμακας, καθώς και αντικείμενα. (Για περισσότερα αναφορικά με τα παραπάνω προ-λεκτικά συστήματα, δείτε το Κεφάλαιο 3.)

Στη βάση αυτών των έμφυτων ειδικών αριθμητικών συστημάτων που διαθέτει ο ανθρώπινος νους (ή παράλληλα με αυτά), αναπτύσσονται οι **πρώιμες μαθηματικές δεξιότητες (initial mathematical skills)**. Για παράδειγμα, τα παιδιά προσχολικής ηλικίας μαθαίνουν την ακολουθία των αριθμολέξεων (Gelman & Gallistel, 1978), και στη συνέχεια μαθαίνουν να τη χρησιμοποιούν για να απαριθμούν συλλογές αντικειμένων. Όταν οι συλλογές είναι πολύ μικρές (4 ή λιγότερα αντικείμενα), η απαρίθμηση δεν είναι απαραίτητη, δεδομένου ότι το πλήθος των στοιχείων που περιλαμβάνονται μπορεί να καθοριστεί με ταχύ και ακριβή τρόπο, μέσω του συστήματος εντοπισμού αντικειμένων. Σύμφωνα με ορισμένες μελέτες, έχει διαπιστωθεί ότι οι δεξιότητες άμεσου καθορισμού μικρού πλήθους αντικειμένων και απαρίθμησης αποτελούν σημαντικούς προβλεπτικούς

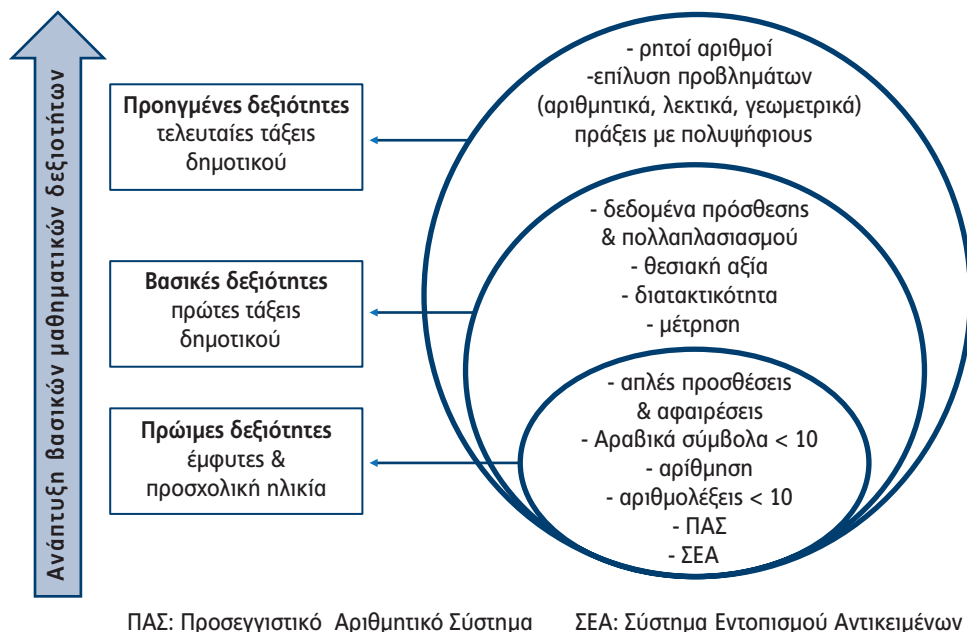
παράγοντες της μετέπειτα μαθηματικής επίδοσης (Kroesbergen, Van Luit, Van Lieshout, Van Loosbroek & Van de Rijt, 2009· Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004). Σε αυτό το στάδιο τα παιδιά αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τις έννοιες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με τη χρήση χειροπιαστών αντικειμένων, ενώ μαθαίνουν και τα αραβικά σύμβολα μέχρι το 9. Οι μαθηματικές δεξιότητες που αποκτώνται σε αυτό το πρώιμο στάδιο, με τυπικό ή με άτυπο τρόπο, εξελίσσονται σε θεμελιώδεις, στις οποίες βασίζονται αργότερα νέες, πιο πολύπλοκες (π.χ. Chu & Geary, 2015· LeFevre et al., 2010).

Στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, τα παιδιά αποκτούν **βασικές μαθηματικές δεξιότητες (basic mathematical skills)**, όπως να προσθέτουν και να αφαιρούν αριθμούς με όλο και πιο εξελιγμένο τρόπο (βλέπε Κεφάλαιο 5). Για παράδειγμα, όσον αφορά το άθροισμα  $3+5 = \_$ , το παιδί από τη στρατηγική **μέτρηση όλων (counting-all)** που αρχικά εφαρμόζει αναπαριστώντας και τους δύο προσθετέους με τα δάχτυλα των χεριών (1,2,3,4,5,6,7,8), μεταβαίνει στη **μέτρηση του μικρότερου (counting-min)**, αρχίζοντας να μετρά προς τα πάνω από τον μεγαλύτερο αριθμό (5), τόσα βήματα όσα το πλήθος του μικρότερου αριθμού (6,7,8). Αργότερα, απλώς ανακαλεί το αντίστοιχο **αριθμητικό δεδομένο (arithmetic fact)**  $3 + 5 = 8$  από τη μακρόχρονη μνήμη. Επίσης, σε αυτό το στάδιο τα παιδιά εδραιώνουν τις γνώσεις τους σχετικά με τα αραβικά σύμβολα των αριθμών, και μαθαίνουν τους κανόνες του συστήματος μέτρησης με βάση το 10 (δεκαδικό σύστημα, βλέπε Κεφάλαιο 4). Έτσι, η αντίληψη της **θεσιακής αξίας (place value)** που διέπει το **ακριβές αριθμητικό σύστημα (exact number system)** τους επιτρέπει να συνδυάζουν τα αραβικά ψηφία από το 0 έως το 9, προκειμένου να αναπαριστούν μεγαλύτερους αριθμούς, να μετα-κωδικοποιούν τους αριθμούς από τη μία μορφή στην άλλη (π.χ. από λεκτική μορφή: διακόσια τριάντα πέντε, σε αραβική μορφή: 235, βλέπε Noël & Turconi, 1999), να συγκρίνουν (Butterworth, 2005) και να διατάσσουν αριθμούς (Lyons & Beilock, 2011), καθώς και να λύνουν απλά αριθμητικά προβλήματα. Η ικανότητα κατανόησης, αναπαράστασης και σύγκρισης αραβικών αριθμών θεωρείται σημαντικός δείκτης αριθμητικής ικανότητας (De Smedt, Noël, Gilmore & Ansari, 2013· Lyons & Beilock, 2011· Schneider et al., 2017). Τέλος, σε αυτήν τη φάση εισάγεται η έννοια του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, και τα παιδιά καλούνται να μάθουν τα αριθμητικά δεδομένα του πολλαπλασιασμού (προπαίδια).

Στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού, οι μαθητές εδραιώνουν τις παραπάνω βασικές μαθηματικές δεξιότητες και σταδιακά αυτές αυτοματοποιούνται, με αποτέλεσμα να προϋποθέτουν μικρότερο γνωστικό φορτίο, επιτρέποντας έτσι την ανάπτυξη πιο **προηγμένων μαθηματικών δεξιοτήτων (advanced mathematical skills)**. Όταν, για παράδειγμα, παρουσιάζεται το άθροισμα  $3 + 5 = \_$ , το παιδί ανακαλεί το αποτέλεσμα από τη μακροπρόθεσμη μνήμη, αφήνοντας πόρους για να ασχοληθεί με πιο σύνθετους υπολογισμούς (όπως  $43 + 25 = \_$ ). Παρεμφερείς διαδικασίες λαμβάνουν χώρα και σε άλλες αριθμητικές πράξεις, όπως οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις με πολυψήφιους αριθμούς. Επιπροσθέτως, σε αυτό το στάδιο γίνεται η εισαγωγή του συνόλου των ρητών αριθμών (κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί). Μέχρι το τέλος του δημοτικού σχολείου, τα παιδιά αναμένεται να είναι σε θέση να επιλύουν αριθμητικά προβλήματα (π.χ. αριθμητικές παραστάσεις, αριθμητικά μοτίβα, απλές εξισώσεις) με φυσικούς και ρητούς αριθμούς

(βλέπε Κεφάλαιο 5 και Κεφάλαιο 7), ή σύνθετα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα (βλέπε Κεφάλαιο 6), ενώ εισάγονται και στη γεωμετρία. Για παράδειγμα, καλούνται να βρουν τη σωστή θέση ενός αριθμού πάνω σε αριθμογραμμές. Η ακρίβεια με την οποία τοποθετούν οι μαθητές τους αριθμούς στις αριθμογραμμές αποτελεί βασική ένδειξη υψηλών μαθηματικών επιδόσεων (Geary, 2011· Siegler & Booth, 2004). Επιπλέον, τα παιδιά καλούνται να συλλογιστούν σε δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα, καθώς και να ταξινομήσουν διάφορα είδη σχημάτων και στερεών με βάση τις κοινές γεωμετρικές τους ιδιότητες, αλλά και να υπολογίζουν περιμέτρους και εμβαδά διάφορων σχημάτων (Mix, Levine, Cheng, Young, Hambrick, Ping & Konstantopoulos, 2016).

Είναι σαφές απ' όσα έχουν προηγηθεί, πως η ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων και τα μαθηματικά εν γένει έχουν ιεραρχική φύση. Οι έμφυτες και πρώιμες μαθηματικές δεξιότητες που αποκτώνται στα πρώτα στάδια της ανάπτυξης του παιδιού αποτελούν τη βάση για την επίτευξη νέων, πιο προηγμένων μαθηματικών δεξιοτήτων, ενώ αυτές συνεχίζουν να εξελίσσονται και να γίνονται ολοένα και πιο εκλεπτυσμένες στα επόμενα στάδια της ανάπτυξης του παιδιού. Το Σχήμα 1.1 επιχειρεί να απεικονίσει τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται οι προαναφερόμενες μαθηματικές δεξιότητες κατά τη διάρκεια ανάπτυξης των παιδιών. (Αξίζει να σημειωθεί ότι η λίστα των μαθηματικών δεξιοτήτων που περιέχονται στο Σχήμα 1 δεν είναι εξαντλητική.)



**Σχήμα 1.1** Απεικόνιση του τρόπου ανάπτυξης βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων, πέραν των ειδικών αριθμητικών συστημάτων που αναφέραμε στην αρχή αυτής της ενότητας, είναι

άρρηκτα συνδεδεμένη και με γενικές και εκτελεστικές λειτουργίες του ανθρώπινου νου. Η γλωσσική ανάπτυξη, η μνήμη, η αναχαίτιση πληροφοριών, οι οπτικο-χωρικές ικανότητες, η λογική και ευέλικτη σκέψη, η ρέουσα νοημοσύνη κ.ά. αλληλεπιδρούν και υποστηρίζουν την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων που περιγράφηκαν πιο πάνω (Cragg & Gilmore, 2014· Peng, Wang, Wang & Lin, 2019· Holmes & McGregor, 2007· Friso-van den Bos, van der Ven, Kroesbergen, & van Luit, 2013). Ωστόσο, υπάρχουν και ποικίλοι μη γνωστικοί παράγοντες, όπως η στάση του μαθητή απέναντι στα μαθηματικά, το άγχος για τα μαθηματικά, καθώς και κοινωνικο-πολιτισμικοί παράγοντες (Evans, Hannula, Zan & Brown, 2006· Lee, Park & Ginsburg, 2016), οι οποίοι συμβάλλουν στην ενίσχυση ή την παρεμπόδιση της ανάπτυξης των μαθηματικών δεξιοτήτων ενός μαθητή. Τέτοιου τύπου παράγοντες δεν θα συζητηθούν, δεδομένου ότι δεν αποτελούν αντικείμενο του παρόντος βιβλίου.

## 1.2 Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά - Δυσαριθμσία

### 1.2.1 Τι είναι;

Τα εκπαιδευτικά συστήματα σε όλο τον κόσμο δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα στην ανάπτυξη των αριθμητικών δεξιοτήτων των παιδιών, καθώς η απόκτηση μαθηματικών ικανοτήτων είναι ζωτικής σημασίας προκειμένου κάποιος να πετύχει στις σύγχρονες κοινωνίες (Ancker & Kaufman, 2007). Ωστόσο, δεν δύνανται όλοι να αποκτήσουν έστω και τις στοιχειώδεις μαθηματικές δεξιότητες. Για παράδειγμα, στη Μινεσότα, το 21% των 11χρονων παιδιών αποφοιτά από το δημοτικό σχολείο χωρίς να έχει φτάσει στο αναμενόμενο επίπεδο μαθηματικών, ενώ το 5% αδυνατεί να αποκτήσει ακόμα και τις αριθμητικές δεξιότητες που αναμένεται να έχει ένα 7χρονο παιδί (Gross, 2007). Οι δυσκολίες αυτού του τύπου, που δεν οφείλονται σε χαμηλή νοημοσύνη ή ανεπαρκή σχολική εκπαίδευση, ονομάζονται **Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά** (ΜΔΜ), ή **Αναπτυξιακή Δυσαριθμσία** (**Developmental Dyscalculia**), ή απλά Δυσαριθμσία. Γενικά, οι δυσκολίες στα μαθηματικά είναι προτιμότερο να προσεγγίζονται ως κάτι συνεχές και όχι ως μία μεμονωμένη κατηγορία, με τις ΜΔΜ - Δυσαριθμσία να βρίσκονται στο άκρο αυτού του συνεχούς. Ωστόσο, ο όρος «Δυσαριθμσία» χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει τη δυσκολία αφομοίωσης ακόμα και των πρώιμων μαθηματικών δεξιοτήτων (π.χ. αντίληψη των συμβολικών και μη συμβολικών αναπαραστάσεων του αριθμού, δυσκολία στην άμεση εκτίμηση περιορισμένου αριθμού αντικειμένων, δυσκολίες στη μέτρηση), δηλαδή τη δυσκολία όσον αφορά την αντίληψη της έννοιας του αριθμού (αίσθηση ή επίγνωση του αριθμού) και των βασικών κανόνων που διέπουν την αριθμητική.

Αναμφισβήτητα, η έρευνα στον τομέα της μη τυπικής ανάπτυξης των μαθηματικών δεξιοτήτων έχει να διανύσει πολλά ακόμα βήματα. Συν τοις άλλοις, μέχρι στιγμής, δεν υπάρχει ομοφωνία στην επιστημονική κοινότητα όσον αφορά τον ορισμό των ΜΔΜ – Δυσαριθμσίας. Το *Διαγνωστικό και Στατιστικό Εγχειρίδιο Ψυχικών Διαταραχών*, Πέμπτη Έκδοση (*Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*, Fifth Edition,



συντμ. DSM-5) ορίζει τη Δυσαριθμσία ως μια ειδική μαθησιακή διαταραχή, μια μειονεξία στα μαθηματικά, που προκαλεί προβλήματα (α) στην αίσθηση του αριθμού, (β) στην απομνημόνευση αριθμητικών δεδομένων, (γ) στην εκτέλεση υπολογισμών με ακρίβεια και ευχέρεια, (δ) στην επακριβή μαθηματική συλλογιστική (APA, 2013).

Ο επιπολασμός της Δυσαριθμσίας εκτιμάται περίπου στο 6% του πληθυσμού. Για παράδειγμα, οι Gross-Tsur, Manor και Shalev (1996) εξέτασαν 3.029 παιδιά Δ΄ δημοτικού στο Ισραήλ, χρησιμοποιώντας δύο βασικά κριτήρια για να εντοπίσουν τα παιδιά με Δυσαριθμσία: να έχουν νοημοσύνη εντός του φυσιολογικού εύρους, και να σημειώνουν σε ένα μαθηματικό δοκίμιο χαμηλότερη επίδοση εν σχέσει με τη μέση επίδοση παιδιών που είναι δύο χρόνια νεότερα (δηλαδή παιδιών της Β΄ δημοτικού). Διαπίστωσαν ότι το 6,5% των παιδιών πληρούσε αυτά τα κριτήρια. Ομοίως, σε μια πιο πρόσφατη μελέτη σε 2.421 παιδιών δημοτικού σχολείου, οι Morsanyi, Bers, McCormack και McGourty (2018) εντόπισαν, στο 6% του δείγματος, επίμονες και σοβαρές δυσκολίες στα μαθηματικά. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις, οι ΜΔΜ δεν εντοπίζονται (Barbarese, Katusic, Colligan, Weaver & Jacobsen, 2005).

Στις ΜΔΜ – Δυσαριθμσία, τα προβλήματα, τις περισσότερες φορές, εξακολουθούν να υφίστανται. Για παράδειγμα, οι Shalev, Manor, Auerbach και Gross-Tsur (1998) παρακολούθησαν για τρία χρόνια τα παιδιά της Δ΄ δημοτικού που είχαν κατηγοριοποιηθεί ως παιδιά με Δυσαριθμσία στην προαναφερθείσα μελέτη. Διαπίστωσαν ότι σχεδόν όλα τα παιδιά εξακολουθούσαν να έχουν χαμηλές επιδόσεις (κάτω από την 25η εκατοστιαία θέση) σε ένα δοκίμιο μαθηματικών, και περίπου τα μισά από αυτά δεν είχαν πάψει να αντιμετωπίζουν πολύ σοβαρές δυσκολίες (είχαν βαθμολογία κάτω από την 5η εκατοστιαία θέση). Οι ΜΔΜ υφίστανται και στην ενήλικη ζωή. Μάλιστα, εκτιμάται ότι το ένα πέμπτο (20%) των ενηλίκων στην Αγγλία έχει αριθμητικές δεξιότητες που κυμαίνονται κάτω του βασικού επιπέδου που προϋποθέτουν οι απαιτήσεις της καθημερινότητας (Williams et al., 2003).

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα άτομα με Δυσαριθμσία είναι πολλαπλές και μπορεί να αφορούν, μεταξύ άλλων, την κατανόηση της έννοιας του λιγότερο και του περισσότερο, την αντιστοίχιση μεταξύ των αριθμητικών συμβόλων και της αντίστοιχης ποσότητας (π.χ. να αντιστοιχούν νοερά στο σύμβολο 5, πέντε αντικείμενα), την εμπέδωση της συμβολικής μορφής των αριθμών (ανάγνωση και γραφή αραβικών αριθμών, κατανόηση του συστήματος με βάση το 10), την αποθήκευση των αριθμητικών δεδομένων στη μακροπρόθεσμη μνήμη (για παράδειγμα, να θυμάται κάποιος ότι  $5 + 4 = 9$ , ή  $8 \times 3 = 24$ ), την αντίληψη αριθμητικών αρχών (π.χ., αν  $6 + 6 = 12$ , τότε  $12 - 6 = 6$ , ή  $60 + 60 = 120$ ), την εκτίμηση αριθμητικών πράξεων (π.χ. να μπορεί να αντιληφθεί πως το άθροισμα  $2,99 + 3,98 = \_$  είναι περίπου 7), την εκτέλεση των διαδικασιών υπολογισμού, ή την επίλυση μαθηματικών λεκτικών προβλημάτων. Στην καθημερινή τους ζωή, οι περισσότεροι από αυτούς εκφράζουν τη δυσαρέσκειά τους για δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, όπως η επιλογή των σωστών νομισμάτων για να πληρώσουν σε ένα κατάστημα ή ο έλεγχος όσων τους επιστρέφονται ως ρέστα κατά τη συναλλαγή, η πιστή τήρηση των υποδεικνυόμενων αναλογιών σε μία συνταγή μαγειρικής, ή η μετατροπή μεταξύ μονάδων μέτρησης, όπως η κατανόηση ότι 6 παρά τέταρτο είναι η ίδια ώρα με το 5:45.

### 1.2.2 Πού οφείλονται;

Τα τελευταία χρόνια, στο πλαίσιο της έρευνας των νευρογνωστικών επιστημών επιχειρείται ο προσδιορισμός της προέλευσης των ΜΔΜ-Δυσαριθμωσίας, εστιάζοντας τόσο στη μελέτη ελλειμμάτων των ειδικών αριθμητικών συστημάτων του ανθρώπινου νου, τα οποία αποτελούν τον ακρογωνιαίο λίθο της ανάπτυξης μαθηματικών δεξιοτήτων, όσο και στη διερεύνηση των επιδράσεων των ελλειμμάτων σε γενικές γνωστικές δεξιότητες όσον αφορά την απόκτηση της μαθηματικής γνώσης. Στη συνέχεια συζητάμε χωριστά τα ελλείμματα των ειδικών αριθμητικών συστημάτων και τα ελλείμματα γενικών γνωστικών δεξιοτήτων.

#### *Ελλείμματα σε ειδικά αριθμητικά συστήματα*

Μία από τις κυρίαρχες υποθέσεις αυτού του τομέα αναφέρεται σε ελλείμματα στο Προσεγγιστικό Αριθμητικό Σύστημα (ΠΑΣ). Πράγματι, τα μωρά γεννιούνται με μια έμφυτη ικανότητα να ανιχνεύουν, με προσεγγιστικό τρόπο, την **αριθμοποσότητα (numerosity)**, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου (βλ. Κεφάλαιο 2). Πρόκειται για μια μη λεκτική αναπαράσταση που υποστηρίζει τη διαισθητική και την κατά προσέγγιση αίσθηση του αριθμού στους ανθρώπους, καθώς και σε πολλά άλλα είδη ζώων (π.χ. αρουραίοι, χιμπατζήδες κ.ά.). Σύμφωνα με τους Wilson και Dehaene (2007), καθώς και τους Piazza et al. (2010), ένα εξασθενημένο ΠΑΣ θα μπορούσε να εξηγήσει την ύπαρξη Δυσαριθμωσίας, δεδομένου ότι αυτό αποτελεί τη βάση κάθε περαιτέρω αριθμητικής ανάπτυξης. Ένας τρόπος για να μετρηθεί το ΠΑΣ είναι να παρουσιαστούν για εξαιρετικά μικρό χρονικό διάστημα (π.χ. λιγότερο από 2 δευτερόλεπτα), προκειμένου να αποτραπεί η μέτρηση, δύο συλλογές αντικειμένων (π.χ. κουκκίδες) τυχαία τοποθετημένες, και ακολούθως να ζητηθεί η επιλογή της συλλογής που έχει τα περισσότερα αντικείμενα. Μέσω της έρευνας διαπιστώθηκε ότι η ικανότητα εντοπισμού του μεγαλύτερου συνόλου μεταξύ δύο συλλογών (χωρίς μέτρηση), όπως έχει υπολογιστεί στην προσχολική ηλικία, προβλέπει την επίδοση στα σχολικά μαθηματικά στην ηλικία των 6 ετών (Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011a). Δεύτερον, έχει φανεί ότι τα παιδιά με Δυσαριθμωσία έχουν χαμηλότερες επιδόσεις, συγκρινόμενα με τα παιδιά τυπικής ανάπτυξης σε τέτοιου είδους δραστηριότητες (π.χ. Piazza et al., 2010· Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011b). Ωστόσο, σε αρκετές άλλες έρευνες δεν αναπαρήχθησαν αυτά τα αποτελέσματα (για μια ανασκόπηση, βλ. De Smedt, Noël, Gilmore & Ansari, 2013).

Από την άλλη πλευρά, σε άλλες έρευνες προέκυψε ότι το ΠΑΣ δεν αποτελεί τη βάση της περαιτέρω μάθησης στα μαθηματικά, αφού μεγαλύτερη σημασία έχει η ικανότητα του παιδιού να συνδέει τα αριθμητικά σύμβολα (π.χ. αριθμολέξεις, όπως «πέντε», ή αραβικούς αριθμούς, όπως «5») με το πραγματικό τους νόημα, δηλαδή με το αριθμητικό μέγεθος που αντιπροσωπεύουν (Rousselle & Noël, 2007· Noël & Rousselle, 2011). Πράγματι, οι συμβολικοί αριθμοί μάς επιτρέπουν να υπερβούμε την κατά προσέγγιση αναπαράσταση του μεγέθους των αριθμών και να ενεργοποιήσουμε μια επακριβή αναπαράστασή τους (το Ακριβές Αριθμητικό Σύστημα, βλ. Κεφάλαιο 3), προκειμένου να κάνουμε μαθηματικά. Σε πολλές μελέτες έχει διαπιστωθεί ότι οι επιδόσεις σε δοκιμασίες μαθηματικών είναι πιο στενά συνδεδεμένες με την ικανότητα να εντοπίζει κάποιος τον

μεγαλύτερο αριθμό μεταξύ δύο αραβικών αριθμών (συμβολική αναπαράσταση), απ' ό,τι με το να συγκρίνει δύο συλλογές αντικειμένων (μη συμβολικές αναπαραστάσεις). Συγκεκριμένα, οι Schneider, Beeres, Coban, Merz, Schmidt, Stricker και De Smedt (2017) εξέτασαν τις μελέτες που υπολογίζουν τη συσχέτιση μεταξύ συμβολικών (αραβικοί αριθμοί) και μη συμβολικών (κουκκίδες) δοκιμασιών σύγκρισης μεγέθους και μαθηματικών επιδόσεων, και οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι υφίσταται ισχυρότερη συσχέτιση με τις συμβολικές, και δευτερευόντως με τις μη συμβολικές δοκιμασίες. Επίσης, σε αρκετές μελέτες αναφέρεται πως τα άτομα με Δυσαριθμσία δυσκολεύονται πολύ στη συμβολική σύγκριση αριθμών, σε σχέση με τους συνομηλίκους τυπικής επίδοσης, και όχι τόσο στη μη συμβολική σύγκριση (βλ., για παράδειγμα, τη μετα-ανάλυση των Schwenk, Sasanguie, Jörg-Tobias, Kempe, Doebler & Holling, 2017).

Ένας άλλος τύπος επεξεργασίας μεγέθους αριθμών που έχει αναφερθεί ως πιθανή αιτία της Δυσαριθμσίας είναι ο **άμεσος καθορισμός μικρού πλήθους (1-4) αντικειμένων (subitizing)**. Πρόκειται για τον γρήγορο και επακριβή προσδιορισμό του αριθμού των στοιχείων ενός ευάριθμου συνόλου (συνήθως, μεταξύ ενός και τεσσάρων στοιχείων). Ωστόσο, δεν είναι πολλές οι μελέτες που έχουν πράγματι παρατηρήσει συρρίκνωση αυτής της ικανότητας σε παιδιά με Δυσαριθμσία (π.χ. Moeller, Neuburger, Kaufmann, Landerl & Nuerk, 2009· Schleifer & Landerl, 2011· Ashkenazi, Mark-Zigdon & Henik, 2013).

Τέλος, σε πρόσφατες έρευνες εξετάζεται μία άλλη βασική πτυχή των αριθμών. Πρόκειται για τη **διατακτικότητα (ordinality)**, δηλαδή τη σειρά των αριθμών στην αριθμητική ακολουθία. Τα παιδιά με Δυσαριθμσία φαίνεται πως είναι πιο αργά, σε σχέση με τα παιδιά τυπικής ανάπτυξης, ως προς την απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών (Landerl, Bevan & Butterworth, 2004). Επιπλέον, η ικανότητά τους να κρίνουν κατά πόσο τρεις αριθμοί είναι σε αύξουσα σειρά (π.χ. 2 3 6), σε φθίνουσα σειρά (π.χ. 6 3 2) ή δεν είναι σε σειρά (π.χ. 3 2 6), φαίνεται πως είναι επίσης ελλειμματική (Rubinsten & Sury, 2011). Η επίδοση σε τέτοιου τύπου δραστηριότητες συνιστά πολύ ισχυρό προγνωστικός παράγοντα της μαθηματικής επίδοσης, σημαντικότερο ακόμη και από τις δραστηριότητες σύγκρισης αριθμών (Lyons & Beilock, 2011· Morsanyi, O'Mahony & McCormack, 2017), Ωστόσο, σε πιο πρόσφατες μελέτες καταδεικνύεται ότι αυτή η δυσκολία δεν αφορά ειδικά τον αριθμητικό τομέα. Πράγματι, δραστηριότητες με μη αριθμητικές σειρές, όπως η απόφαση σχετικά με τη σειρά των μηνών ή των γραμμάτων, επίσης συσχετίζονται με τις μαθηματικές επιδόσεις σε ενήλικες (Vos, Sasanguie, Gevers & Reynvoet, 2017· Morsanyi, O'Mahony & McCormack, 2017), ενώ χάρη σε αυτές είναι εφικτή η πρόβλεψη των μαθηματικών ικανοτήτων των παιδιών της Α' δημοτικού έναν χρόνο αργότερα (O'Connor, Morsanyi & McCormack, 2018). Τέλος, στα άτομα με Δυσαριθμσία εντοπίζονται δυσκολίες σε δραστηριότητες διάταξης, τόσο αριθμητικών όσο και μη αριθμητικών στοιχείων (Morsanyi, van Bers, O'Connor & McCormack, 2018). Τα άτομα με Δυσαριθμσία δυσκολεύονται, κατά κύριο λόγο, στη διατήρηση της σειριακής διάταξης των στοιχείων, και δευτερευόντως στη διατήρηση των ίδιων των στοιχείων (Attout, Salmon & Majerus, 2015· De Visscher, Szmalec, Van der Linden & Noël, 2015).

Ωστόσο, το τελευταίο διάστημα, σε όλο και περισσότερες μελέτες επισημαίνεται το

γεγονός ότι η Δυσαριθμησία δεν αποτελεί ένα ομοιογενές προφίλ που συνίσταται σε μία και μόνη υποκείμενη αιτία, αλλά πως υπάρχουν ετερογενή προφίλ Δυσαριθμησίας. Για παράδειγμα, οι Skagerlund και Träff (2016) έδειξαν ότι ορισμένες ΜΔΜ ενσκήπτουν εξαιτίας αδυναμιών στη συμβολική επεξεργασία των αριθμών, άλλες οφείλονται εξίσου στη συμβολική και στη μη συμβολική επεξεργασία των αριθμών, καθώς και ότι ελλείμματα σε γενικές γνωστικές δεξιότητες ενδεχομένως είναι η αιτία ορισμένων ΜΔΜ (Träff, Olsson, Östergren & Skagerlund, 2017). Ο Szucs (2016) διαχώρισε τα άτομα με ΜΔΜ, ανάλογα με το αν έχουν ή όχι συναφή προβλήματα στην ανάγνωση: Τα άτομα με μαθησιακές δυσκολίες, τόσο στα μαθηματικά όσο και στην ανάγνωση, χαρακτηρίζονταν από αδύναμη λεκτική βραχυπρόθεσμη και εργαζόμενη μνήμη, ενώ οι μεμονωμένες ΜΔΜ συνδέονταν με αδύναμη οπτικοχωρική βραχυπρόθεσμη και εργαζόμενη μνήμη. Χρησιμοποιώντας έναν άλλο τρόπο διάκρισης μεταξύ των ατόμων με ΜΔΜ, οι De Visscher, Szmalec, Van der Linden και Noël (2015) διαπίστωσαν ότι η **υπερευαισθησία στις παρεμβολές ομοιότητας (hypersensitivity to interference similarity)**, βλ. Κεφάλαιο 5) στη μνήμη πιθανόν συνιστά την αιτία της μεμονωμένης δυσκολίας όσον αφορά την ανάκληση των αριθμητικών δεδομένων (δηλαδή άτομα που δυσκολεύονται να αποθηκεύσουν στη μνήμη το αποτέλεσμα μικρών υπολογισμών), ενώ ελλείμματα επεξεργασίας της διάταξης θα οδηγούσαν σε καθολική Δυσαριθμησία. Άλλοι ερευνητές δεν προέβησαν σε καμία διάκριση εκ των προτέρων, αλλά προχώρησαν σε αναλύσεις συστάδων (ένα συγκεκριμένο είδος στατιστικής ανάλυσης), προκειμένου να εντοπίσουν διαφορετικές υποομάδες ατόμων με ΜΔΜ. Έτσι, οι Bartelet, Ansari, Vaessen και Blomert (2014) εντόπισαν έξι διακριτές ομάδες παιδιών με ΜΔΜ: (1) εκείνα με δυσκολίες στις νοερές αριθμογραμμές, (2) εκείνα με αδύναμο προσεγγιστικό αριθμητικό σύστημα, (3) εκείνα με χωρικές δυσκολίες, (4) εκείνα με δυσχέρειες στην πρόσβαση στο μέγεθος των αριθμών από συμβολικούς αριθμούς, (5) εκείνα χωρίς κανένα αριθμητικό γνωστικό έλλειμμα, (6) μια ομάδα με συνδυασμό προβλημάτων.

Επί του παρόντος, πολλοί συγγραφείς συμφωνούν με την άποψη ότι η ανάπτυξη των αριθμητικών δεξιοτήτων βασίζεται σε πολλαπλές νευρογνωστικές συνιστώσες, καθώς και ότι ενδεχόμενη βλάβη σε οποιαδήποτε από αυτές ενδέχεται να θέσει σε κίνδυνο την ανάπτυξή τους (Fias, Menon & Szucs, 2013). Κατά συνέπεια, η ετερογένεια των ΜΔΜ θα πρέπει να θεωρείται δεδομένη. (Βλ. επίσης, Andersson & Östergren, 2012.)

Πιο πάνω εστίασαμε στα βασικά ειδικά αριθμητικά συστήματα που θεωρούνται απαραίτητα στην εκμάθηση των μαθηματικών. Οι εν λόγω βασικές αριθμητικές διαδικασίες είναι το προσεγγιστικό αριθμητικό σύστημα, ο άμεσος καθορισμός μικρών αριθμητικών ποσοτήτων, η πρόσβαση στο αριθμητικό μέγεθος από συμβολικούς αριθμούς, και η αντίληψη της διάταξης των αριθμών. Ένα έλλειμμα σε οποιαδήποτε από αυτές τις βασικές αριθμητικές διαδικασίες, ενδεχομένως θα μπορούσε να οδηγήσει σε κάποιου είδους ΜΔΜ. Όμως, πέραν αυτών των μείζονος σημασίας αριθμητικών διεργασιών, και οι γενικές γνωστικές διεργασίες θεωρούνται πολύ σημαντικές ως προς την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων. Ο ρόλος των εν λόγω γενικών γνωστικών διεργασιών θα συζητηθεί στην ενότητα που ακολουθεί.

## Ελλείμματα σε γενικές γνωστικές δεξιότητες

### Γλώσσα

Μία από τις γενικές γνωστικές διεργασίες που επηρεάζουν την εκμάθηση των μαθηματικών είναι η γλώσσα. Πράγματι, μπορεί τα μωρά να γεννιούνται με έμφυτο το προσεγγιστικό αριθμητικό σύστημα, αλλά η πρώτη μάθηση των αριθμών από το παιδί αφορά την εκμάθηση των αριθμολέξεων, προκειμένου να μάθουν να μετρούν. Πολυάριθμες μελέτες έχουν δείξει πως τα παιδιά με ειδική γλωσσική διαταραχή παρουσιάζουν μεγάλες δυσκολίες στην εκμάθηση και τη χρήση των αριθμολέξεων (Fazio, 1994· Donlan, Cowan, Newton & Lloyd, 2007). Στη συνέχεια, εκδηλώνονται δυσκολίες και σε άλλες αριθμητικές δεξιότητες, όπως στην απαρίθμηση ή στους νοερούς υπολογισμούς. Σε γενικές γραμμές, το μαθηματικό επίπεδο των παιδιών με ειδικές γλωσσικές διαταραχές είναι αντίστοιχο με το επίπεδό τους στη γλώσσα (Durkin, Mok & Conti-Ramsden, 2013). Ωστόσο, φαίνεται πως αυτή η υστέρηση εμφανίζεται κατά την επεξεργασία του αριθμού με ακρίβεια (αριθμολέξεις ή αραβικοί αριθμοί) και όχι κατά την επεξεργασία του προσεγγιστικού αριθμητικού μεγέθους με μη συμβολικό υλικό (Nys, Content & Leybaert, 2013).

Η συσχέτιση μεταξύ γλωσσικών και μαθηματικών δεξιοτήτων παρατηρείται και σε πληθυσμούς τυπικής ανάπτυξης, καθώς έχει φανεί πως οι φωνολογικές ικανότητες προοιωνίζονται την αριθμητική και τη μαθηματική ανάπτυξη. Έτσι, σε αρκετές μελέτες έχουν καταστεί εμφανείς σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ των αριθμητικών επιδόσεων των παιδιών και της φωνολογικής τους επίγνωσης (της αντίληψης των ήχων ή των φωνημάτων που συνθέτουν τις λέξεις). (Βλ. Leather & Henry, 1994· Hecht, Cowan, Newton & Lloyd, 2001.) Οι ικανότητες φωνολογικής επίγνωσης (που μετρώνται στην ηλικία των 4 ή των 5 ετών) φαίνεται να προβλέπουν τις μαθηματικές δεξιότητες των παιδιών 1 ή 2 χρόνια αργότερα (Alloway, Gathercole, Adams, Willis, Eaglen & Lamont, 2005· Simmons & Singleton, 2008). Ωστόσο, οι Krajewski και Schnieder (2009) έδειξαν πως οι ικανότητες φωνολογικής επίγνωσης που μετρήθηκαν στην ηλικία των 5 ετών συσχετίστηκαν, σε μεγάλο βαθμό, με τις μαθηματικές επιδόσεις στην ηλικία των 8 ετών, που αφορούσαν βασικές αριθμητικές δεξιότητες (μέτρηση και ανάγνωση αραβικών αριθμών), αλλά πολύ λιγότερο με δραστηριότητες που προϋπέθεταν κατανόηση της ποσότητας που εκφράζουν οι αριθμοί.

Συν τοις άλλοις, πολλές είναι οι μελέτες που έχουν διερευνήσει τις μαθηματικές δεξιότητες ατόμων με Δυσλεξία, δεδομένου ότι πρόκειται για διαταραχή που χαρακτηρίζεται από περιορισμένη φωνολογική επίγνωση. Μια ανασκόπηση αυτού του θέματος δείχνει ότι τα άτομα με Δυσλεξία έχουν συχνά χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά, ιδιαίτερα στην ανάκληση αριθμητικών δεδομένων από τη μνήμη (Simmons & Singleton, 2008), δηλαδή στην άμεση εύρεση των αποτελεσμάτων απλών πράξεων, όπως, για παράδειγμα,  $5 + 3 = \_$  ή  $6 \times 3 = \_$ . Ακόμα, ερευνητές έχουν μελετήσει άτομα με Δυσλεξία που δεν παρουσιάζουν ταυτόχρονα και Δυσαριθμσία. Και σε αυτή την περίπτωση διαπιστώθηκε ότι τα εν λόγω άτομα αντιμετωπίζουν δυσκολίες, κατά κύριο λόγο, στη συγκρότηση ενός δικτύου αριθμητικών δεδομένων στη μακροπρόθεσμη μνήμη. (Βλ., για παράδειγμα, Cirino, Ewing-Cobbs, Barnes, Fuchs & Fletcher, 2007· Hanich et al., 2001· Boets & De Smedt, 2010.) Σύμφωνα με τον Göbel (2015), η συσχέτιση μεταξύ του

φωνολογικού ελλείμματος και των δυσκολιών στη δημιουργία δικτύου αριθμητικών δεδομένων στη μνήμη οφείλεται στο γεγονός πως η ίδια εγκεφαλικά δομή, και συγκεκριμένα η αριστερή γωνιακή έλικα, εμπλέκεται σε αμφότερες τις διαδικασίες.

### Μνήμη

Ένας δεύτερος σημαντικός γνωστικός παράγοντας που επηρεάζει τη μαθηματική επίδοση είναι η μνήμη. Πράγματι, τα μαθηματικά απαιτούν την απομνημόνευση πολλών πληροφοριών και την ανάκτησή τους από τη μακρόχρονη μνήμη, όπως, για παράδειγμα, οι αριθμολέξεις και η ακολουθία των αριθμολέξεων προκειμένου να επιτευχθεί η μέτρηση, η ανάκτηση των αποτελεσμάτων απλών πράξεων (δηλαδή τα αριθμητικά δεδομένα), ή οι αλγόριθμοι για την εκτέλεση ποικίλων μαθηματικών διαδικασιών (π.χ. κάθετες πράξεις με πολυψήφιους αριθμούς ή πράξεις μεταξύ κλασμάτων). Μια μελέτη διαπίστωσε ότι τα παιδιά με ΜΔΜ ήταν πιο αργά από τους συνομηλίκους τους ως προς την απαγγελία της ακολουθίας των αριθμολέξεων (Landerl, Bevan & Butterworth, 2004), ενώ σε αρκετές άλλες μελέτες διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά με ΜΔΜ εμφανίζουν προβλήματα στην απομνημόνευση των αριθμητικών δεδομένων (π.χ. Garnett & Fleischner, 1983· Geary, Hoard & Hamson, 1999). Οι δυσκολίες στην απομνημόνευση των αριθμητικών δεδομένων δεν θα μπορούσαν να αποδοθούν αποκλειστικά στις συνολικά ανεπαρκείς ικανότητες της μακροπρόθεσμης μνήμης (Mussolin & Noël, 2008· De Visscher & Noël, 2014a και 2014a), αλλά οφείλονται και στην υπερβολική ευαισθησία στις παρεμβολές ομοιότητας στη μνήμη (De Visscher & Noël, 2014a και 2014a, βλ. Κεφάλαιο 5). Επιπροσθέτως, οι δυσκολίες στη μνήμη διαδικασιών έχει αποδειχθεί ότι συσχετίζονται με την ανεπαρκή επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων σε προπτυχιακούς φοιτητές (Holmes & McGregor, 2007).

Πολλές μελέτες έχουν ασχοληθεί με τις ικανότητες της βραχυπρόθεσμης μνήμης, βασιζόμενες στην ιδέα ότι η αποθήκευση στη μακροπρόθεσμη μνήμη των αποτελεσμάτων απλών πράξεων, όπως  $4 + 3 = 7$ , προϋποθέτει πως οι τρεις αυτοί αριθμοί έχουν αρχικά ενεργοποιηθεί στη βραχυπρόθεσμη μνήμη. Οι μελέτες αυτές έχουν διαπιστώσει ότι όλες οι συνιστώσες της εργαζόμενης μνήμης, συμπεριλαμβανομένων της **αναχαίτισης (inhibition)**, της **εναλλαγής (sifting)** και της **ενημέρωσης (update)**, συσχετίζονται με τις μαθηματικές επιδόσεις, με την υψηλότερη συσχέτιση να αφορά τη λεκτική ενημέρωση (βλ. τη μετα-ανάλυση των Friso-van den Bos, van der Ven, Kroesbergen & van Luit, 2013). Επιπλέον, όταν αντιπαραβάλλονται οι διάφοροι αριθμητικοί τομείς, οι ικανότητες της εργαζόμενης μνήμης συσχετίζονται εντονότερα με την επίλυση λεκτικών προβλημάτων και την εκτέλεση υπολογισμών (βλ. τη μετα-ανάλυση των Peng, Namkung, Barnes & Sun, 2016). Τέλος, αρκετές μελέτες έχουν δείξει ότι τα παιδιά με ΜΔΜ εμφανίζουν φτωχή λεκτική και οπτικοχωρική μνήμη εργασίας (βλ. τη μετα-ανάλυση των Swanson & Jerman, 2006).

### Οπτικο-χωρική επεξεργασία

Ένας ακόμα παράγοντας γενικού γνωστικού τομέα που εμπλέκεται στην ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων είναι ο οπτικο-χωρικός. Πράγματι, προφανώς, τα μαθηματικά απαιτούν οπτικο-χωρική επεξεργασία για τη γεωμετρία αλλά και για την κατανόηση

του συστήματος αξίας θέσης των αραβικών αριθμών, ή για την εκτέλεση κάθετων πράξεων με πολυψήφιους αριθμούς. Συν τοις άλλοις, οι οπτικοχωρικές διεργασίες φαίνεται να υποστηρίζουν την επίλυση λεκτικών προβλημάτων, καθώς η υψηλή επίδοση όσον αφορά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων συσχετίζεται με τη συχνή χρήση οπτικών αναπαραστάσεων (Van Garderen, 2006). Επιπλέον, η ίδια η αναπαράσταση του αριθμητικού μεγέθους φέρεται πως είναι προσανατολισμένη στον χώρο (βλ. Κεφάλαιο 3 και Hubbard, Piazza, Pinel & Dehaene, 2005). Πράγματι, στις κουλτούρες της Δύσης, οι μικροί αριθμοί αναπαρίστανται στο αριστερό μέρος μιας νοητικής αριθμογραμμής, ενώ οι μεγαλύτεροι αριθμοί στα δεξιά. Μία από τις γνωστότερες δραστηριότητες για τη μέτρηση της αντιστοιχίας των αριθμών στον χώρο είναι η εκτίμηση σε αριθμογραμμές: στο παιδί παρουσιάζεται μια μη βαθμολογημένη (κενή) οριζόντια γραμμή, με έναν αριθμό γραμμένο σε κάθε άκρο (π.χ. 0 και 100), και του ζητείται να τοποθετήσει συγκεκριμένους αριθμούς πάνω σε αυτήν τη γραμμή. Η μετα-ανάλυση των Schneider et al. (2018) δείχνει ότι η ακρίβεια σε αυτήν τη δραστηριότητα συσχετίζεται εντόνως με την ευρύτερη μαθηματική ικανότητα, υπογραμμίζοντας έτσι, εκ νέου, τη σημασία της σύνδεσης του χώρου και του αριθμού στην αριθμητική ανάπτυξη.

Σε αρκετές μελέτες έχει διαπιστωθεί πως οι ικανότητες στα μαθηματικά συσχετίζονται με τις χωρικές δεξιότητες (Mix & Cheng, 2012, Osmon, Smerz, Braun & Plambeck, 2006. Για μία ανασκόπηση, βλ. Crollen & Noël, 2017). Ο Rourke και οι συνεργάτες του (Rourke & Finlayson, 1978· Rourke, 1993· Rourke & Conway, 1997) προσδιόρισαν έναν τύπο ΜΔΜ που οφείλεται σε οπτικο-χωρικές δυσκολίες. Προς επίρρωση αυτού, η Mammarella και οι συνεργάτες της παρατήρησαν ότι τα παιδιά με μειωμένες οπτικοχωρικές ικανότητες αλλά πλήρεις λεκτικές ικανότητες είχαν χειρότερες επιδόσεις από τους συνομηλίκους τους τυπικής ανάπτυξης στη γεωμετρία (Mammarella, Giofrè, Ferrara & Cornoldi, 2013), στους γραπούς υπολογισμούς, καθώς και στη διάταξη αριθμών (Mammarella, Lucangeli & Cornoldi, 2010). Η Crollen και οι συνεργάτες της (Crollen & Noël, 2015 και Crollen, Vanderclausen, Allaire, Pollaris & Noël, 2015) προχώρησαν και έδειξαν ότι στα παιδιά με οπτικο-χωρική διαταραχή, η αναπαράσταση του μεγέθους των αριθμών είναι λιγότερο ακριβής και ο προσανατολισμός αριστερά δεξιά δεν είναι εδραιωμένος. Ωστόσο, δεν οφείλονται όλες οι ΜΔΜ σε ανεπαρκείς οπτικο-χωρικές δεξιότητες. Για παράδειγμα, οι Szucs, Devine, Soltesz, Nobes και Gabriel (2013) δεν εντόπισαν καμία σημαντική διαφορά μεταξύ των παιδιών με ΜΔΜ και των παιδιών της ομάδας ελέγχου σε δύο οπτικο-χωρικές δραστηριότητες (νοερός προσανατολισμός και χωρική συμμετρία), αλλά διαπίστωσαν φτωχότερη οπτικο-χωρική βραχυπρόθεσμη και εργαζόμενη μνήμη.

### Συλλογιστική

Αναμφισβήτητα, οι δεξιότητες συλλογισμού είναι σημαντικές για την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, ειδικά για τα πιο σύνθετα μαθηματικά προβλήματα. Πράγματι, ορισμένες μελέτες διαπίστωσαν ότι η μη λεκτική νοημοσύνη που μετρήθηκε στην Α΄ ή στη Γ΄ δημοτικού προέβλεψε την επίλυση μαθηματικών λεκτικών προβλημάτων ή τη μαθηματική επίδοση έναν χρόνο αργότερα (Fuchs, Compton, Fuchs, Paulsen, Bryant & Hamlett, 2005· Nunes, Bryant, Evans, Bell, Gardner, Gardner & Carraher, 2007· Fuchs, Fuchs,

Compton, Powell, Seethaler, Capizzi, Schatschneider & Fletcher, 2006). Σε ένα ευρύ ηλικιακό φάσμα (6 έως 21 ετών), οι Green, Bunge, Chiongbian, Barrow και Ferrer (2017) διαπίστωσαν ότι ο ρέων συλλογισμός συνιστά έναν σημαντικό προγνωστικό παράγοντα της επίδοσης στα μαθηματικά 1,5 και 3 χρόνια αργότερα. Επιπλέον, οι Morsanyi, Devine, Nobes και Szucs (2013), καθώς και οι Schwartz, Epinat-Duclos, Léone, Poisson και Prado (2018), διαπίστωσαν ότι τα παιδιά με ΜΔΜ έχουν χαμηλότερες δεξιότητες συλλογισμού (στην προκειμένη περίπτωση, μεταβατικού συλλογισμού), σε σχέση με τα παιδιά τυπικής ανάπτυξης. Τέλος, οι Nunes, Bryant, Evans, Bell, Gardner, Gardner και Carraher (2007) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η εκπαίδευση των παιδιών στη λογική σκέψη οδήγησε σε μεγαλύτερη πρόοδο στα μαθηματικά, συγκρινόμενη με μια ομάδα ελέγχου που δεν έλαβε αυτή την εκπαίδευση, γεγονός που καθιστά εμφανή την αιτιώδη σχέση μεταξύ της λογικής σκέψης και της μάθησης των μαθηματικών.

### 1.3 Ετερογένεια ΜΔΜ-Δυσαριθμσίας

Έχει καταστεί σαφές, βάσει όσων αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, ότι η ανάπτυξη αριθμητικών δεξιοτήτων και γενικότερα η μάθηση των μαθηματικών βασίζονται, τόσο σε διάφορα ειδικά αριθμητικά συστήματα όσο και σε πολλές γενικές γνωστικές δεξιότητες, όπως η γλώσσα, η μνήμη, η οπτικο-χωρική αντίληψη και οι δεξιότητες συλλογισμού. Κατά συνέπεια, ελλείμματα σε οποιοδήποτε από τα παραπάνω ενδέχεται να προκαλέσουν συγκεκριμένου τύπου δυσκολίες στη μάθηση των μαθηματικών, με αποτέλεσμα τα άτομα με ΜΔΜ-Δυσαριθμσία να παρουσιάζουν μεγάλη ανομοιογένεια μεταξύ τους. Για του λόγου το αληθές, σε μία πρόσφατη μετα-ανάλυση που εξέτασε τις διαφορές στις μαθηματικές και γνωστικές δεξιότητες μεταξύ ατόμων με και χωρίς ΜΔΜ, δεν εντοπίστηκε κανένα συνεπές και συγκεκριμένο προφίλ ΜΔΜ (Kroesbergen, Huijsmans & Friso-van den Bos, 2022). Αυτή η διαπίστωση ευθυγραμμίζεται με την άποψη των Peters και Ansari (2020), που υποστηρίζουν πως η μελλοντική έρευνα για τις ΜΔΜ επιβάλλεται να αποτύχει τις ομαδικές συγκρίσεις και πρέπει να εστιάζει στο συνεχές των ακαδημαϊκών ικανοτήτων κάθε ατόμου.

Πράγματι, όπως φαίνεται, όλο και περισσότεροι επιστήμονες συμφωνούν ότι οι ΜΔΜ σχετίζονται με ελλείμματα ποικίλων συνδυασμών δεξιοτήτων, όπως αυτές που περιγράφησαν παραπάνω (Bartelet, Ansari, Vaessen, & Blomert, 2014· Ashkenazi, Black, Abrams, Hoefft, & Menon, 2013· de Souza Salvador et al., 2019). Οι περισσότερες από αυτές τις μελέτες εξετάζουν, τόσο τις γενικές όσο και τις ειδικές ικανότητες του τομέα που εμπλέκονται στη μάθηση των μαθηματικών, προκειμένου να διερευνήσουν τα μεταβλητά προφίλ που σχετίζονται με τους μαθητές που εμφανίζουν χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά. Ο σκοπός αυτής της προσέγγισης είναι πολλαπλός: να εντοπιστούν υπότυποι ΜΔΜ με βάση συγκεκριμένες μαθηματικές δραστηριότητες οι οποίες, όπως διαπιστώθηκε, δυσχεραίνουν ιδιαίτερα ομάδες μαθητών, να λάβουν χώρα διαφοροποιήσεις εντός του πληθυσμού των μαθητών με ΜΔΜ, και να αναδειχθεί η ετερογένεια αυτού του πληθυσμού (π.χ., Andersson & Östergren, 2012· Fias, Menon & Szucs, 2013· Bartelet, Ansari, Vaessen & Blomert, 2014· De Visscher, Szmalec, Van der Linden & Noël, 2015· Skagerlund & Träff,



2016· Szucs, 2016· Träff, Olsson, Östergren & Skagerlund, 2017). Συνεπώς, συνιστώνται η πολυδιάστατη προσέγγιση των ΜΔΜ και η αξιολόγηση σε εξατομικευμένο επίπεδο. Οι ειδικοί /εκπαιδευτικοί δεν θα πρέπει να εκλαμβάνουν τις ΜΔΜ ως μια ξεχωριστή ειδική δυσκολία που θα μπορούσε να διαφοροποιηθεί από άλλες μορφές δυσκολιών στα μαθηματικά, αλλά οφείλουν να τις αξιολογούν σε ένα συνεχές φάσμα.

## 1.4 Μαθηματικό γνωστικό προφίλ

Αρκετές μελέτες έχουν αξιοποιήσει διάφορες μεθοδολογίες με στόχο να διερευνήσουν σχέσεις μεταξύ διάφορων δεξιοτήτων που θεωρούνται απαραίτητες για την εκμάθηση των μαθηματικών. Οι συσχετίσεις αυτές συνδέονται με τη συνολική μαθηματική επίδοση των μαθητών ή με τις επιδόσεις τους σε έναν συγκεκριμένο μαθηματικό τομέα, προκειμένου να εντοπιστούν υπο-ομάδες μαθητών με διαφορετικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα όσον αφορά τη μαθηματική επίδοση (de Souza Salvador, Moura, Wood & Geraldí Haase, 2019). Μέχρι στιγμής δεν έχουν προκύψει ισχυρές εμπειρικές αποδείξεις βάσει των οποίων να εξάγεται το συμπέρασμα ότι οποιοδήποτε από τα μοντέλα κατηγοριοποίησης των μαθηματικών δεξιοτήτων ή δυσκολιών που έχουν προταθεί είναι πράγματι κατάλληλο για να περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι βασικές μαθηματικές δεξιότητες κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης των μαθητών, με αφετηρία την έκθεσή τους στην επίσημη μαθηματική διδασκαλία στην αρχή του δημοτικού. Στην πραγματικότητα, τα σημερινά κενά στη βιβλιογραφία είναι εφικτό να προσεγγιστούν υπό δύο οπτικές γωνίες. Από τη μία πλευρά, οι σταθμισμένες αξιολογήσεις επίδοσης, παρόλο που εξετάζουν ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών δεξιοτήτων, δεν αναλύουν τις επιδόσεις των μαθητών με βάση πιθανές υποκείμενες γνωστικές διεργασίες στις οποίες βασίζονται οι μαθηματικές δοκιμασίες που απευθύνονται στους μαθητές. Από την άλλη πλευρά, πολλές ψυχομετρικές μελέτες επικεντρώνονται, ως επί το πλείστον, σε μια συγκεκριμένη δεξιότητα (ή σε λίγες από αυτές), χωρίς να μελετούν ευρύτερα συστήματα μέσω των οποίων είναι πιθανό να συσχετίζονται με πολλές άλλες δεξιότητες.

Απ' ό,τι είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, μόνο σε μία μελέτη έχει εξεταστεί η δομή ενός ευρέος φάσματος μαθηματικών δεξιοτήτων σε παιδιά του δημοτικού σχολείου (Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Roussos, 2017). Αυτή η μελέτη είχε στόχο να τεκμηριώσει εμπειρικά το τετραπλό μοντέλο των Karagiannakis, Baccaglini-Frank και Papadatos (2014), το οποίο επιχειρεί να κατηγοριοποιήσει τις βασικές μαθηματικές δεξιότητες/δυσκολίες με κριτήριο τις υποκείμενες γνωστικές δεξιότητες (ειδικές ή γενικές) στις οποίες φαίνεται πως, κατά κύριο λόγο, εδράζονται. Το μοντέλο αυτό απαρτίζεται από τους εξής τομείς: 1) *επίγνωση αριθμού*, 2) *μνήμη* (ανάκλησης και επεξεργασίας), 3) *συλλογιστική*, 4) *οπτικο-χωρικός* τομέας. Στον Πίνακα 1.1 παρουσιάζονται οι μαθηματικές δεξιότητες που περιλαμβάνονται σε κάθε τομέα. Αυτό το τετραπλό μοντέλο παρέχει μια θεωρητική βάση για τη διερεύνηση της ετερογένειας των ΜΔΜ, αλλά και γενικότερα, των γνωστικών δεξιοτήτων και ελλειμμάτων των μαθητών σε σχέση με την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων.

**Πίνακας 1.1** Τομείς του τετραπλού μοντέλου και σύνολα μαθηματικών δεξιοτήτων που σχετίζονται με κάθε τομέα (Karagiannakis, Baccaglioni-Frank & Papadatos, 2014).

	Σχετιζόμενες μαθηματικές δεξιότητες
<b>Επίγνωση/αίσθηση αριθμού</b>	Άμεσος καθορισμός μικρού πλήθους αντικειμένων (έως 4): κατά προσέγγιση εκτίμηση ποσοτήτων· τοποθέτηση αριθμών σε αριθμογραμμές· αντίληψη της ποσότητας που αναπαριστούν τα αραβικά σύμβολα· μετακωδικοποίηση ενός αριθμού από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (αναλογική-αραβική-λεκτική)· επίγνωση των αρχών της μέτρησης.
<b>Μνήμη (ανάκληση &amp; επεξεργασία)</b>	Ανάκληση αριθμητικών δεδομένων· αποκωδικοποίηση της ορολογίας (αριθμητής, παρονομαστής, ισοσκελές, ισόπλευρο)· απομνημόνευση θεωρημάτων και τύπων με ακρίβεια· εκτέλεση νοερών υπολογισμών με ευχέρεια· απομνημόνευση διαδικασιών και τήρηση των βημάτων με ακρίβεια.
<b>Συλλογιστική</b>	Αντίληψη μαθηματικών εννοιών, ιδεών και σχέσεων· κατανόηση των βημάτων σε σύνθετες διαδικασίες/αλγόριθμους· κατανόηση βασικών αριθμητικών αρχών (αντιμεταθετικότητα, αντίστροφη σχέση μεταξύ πράξεων)· αντίληψη της συνεπαγωγής (προτάσεις τύπου «αν... τότε...»)· κατανόηση της σημασιολογικής δομής των προβλημάτων· λήψη στρατηγικών αποφάσεων (ευελιξία)· ικανότητες γενίκευσης
<b>Οπτικο-χωρικός</b>	Τοποθέτηση αριθμών σε αριθμογραμμή· σύγκυση αραβικών αριθμών και μαθηματικών συμβόλων· εκτέλεση γραπτών υπολογισμών όταν η θέση είναι σημαντική (δανικά/κρατούμενα)· ερμηνεία και επεξεργασία της χωρικής οργάνωσης μαθηματικών αντικειμένων (δεκαδικοί αριθμοί, εκθέτες, γεωμετρικά δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα, γραφικές παραστάσεις, πίνακες).

Στην εν λόγω μελέτη επιχειρήθηκε η εμπειρική τεκμηρίωση του τετραπλού μοντέλου. Συμμετείχαν 165 μαθητές Ε΄ και Στ΄ δημοτικού τυπικής επίδοσης, στους οποίους ανατέθηκε, μέσω Η/Υ, μια δοκιμασία που περιελάμβανε ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών δραστηριοτήτων. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν μετά από τη διεξαγωγή μιας σειράς διερευνητικών και επιβεβαιωτικών παραγοντικών αναλύσεων, παρήγαγαν ισχυρές ενδείξεις αναφορικά με την εγκυρότητα του μοντέλου. Επιπροσθέτως, ο πληθυσμός του δείγματος κατηγοριοποιήθηκε σε έξι διακριτές ομάδες επιδόσεων, με τους μαθητές που αντιμετώπιζαν ΜΔΜ ή εμφάνιζαν χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά να κατανέμονται σε πέντε από τις ομάδες (για περισσότερα, βλέπε Karagiannakis, Baccaglioni-Frank & Roussos, 2017).

Σε μία δεύτερη μελέτη επιχειρήθηκε να εξεταστεί το πώς ένα ευρύτερο φάσμα αριθμητικών και οπτικο-χωρικών μετρήσεων, μέσω των οποίων αξιολογούνται και προηγμένες μαθηματικές δεξιότητες, ομαδοποιούνται μεταξύ τους. Το δείγμα αποτέλεσαν 1.346 μαθητές τυπικής επίδοσης, από τη Β΄ έως τη Στ΄ δημοτικού. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν, τόσο από τη διερευνητική όσο και από την επιβεβαιωτική ανάλυση, έδειξαν

μια αμετάβλητη δομή τεσσάρων παραγόντων σε όλες τις τάξεις, η οποία επιβεβαιώνει σε γενικές γραμμές, με μερικές διαφοροποιήσεις, το τετραπλό μοντέλο (Karagiannakis, Noël, Baccaglioni-Franck & Termine, επί πιεστηρίου).

Τα παραπάνω ευρήματα καταδεικνύουν ότι είναι εξαιρετικά σημαντικό να αξιολογούνται οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθηματικών δεξιοτήτων, καθώς και οι προ-απαιτούμενες γνωστικές δεξιότητες στις οποίες εδράζονται. Χάρη σε αυτήν τη γνώση είναι εφικτή η ενημέρωση του εκπαιδευτικού αναφορικά με το μαθηματικό γνωστικό προφίλ των μαθητών. Επίσης, ο εκπαιδευτικός διευκολύνεται στην προσπάθειά του να εκπονήσει προγράμματα διδασκαλίας ή παρέμβασης, προκειμένου να είναι επαρκέστερα ευθυγραμμισμένα με τη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών (βάσει της γνώσης σχετικά με το πώς συγκεκριμένες δεξιότητες που διέπουν μία συγκεκριμένη μαθηματική δραστηριότητα μπορούν να αναπτυχθούν και να σταθεροποιηθούν με την πάροδο του χρόνου). Συν τοις άλλοις, τα γνωστικά ελλείμματα ενδέχεται να συνδέονται με ένα συγκεκριμένο σύνολο μαθηματικών δεξιοτήτων, και με τις πληροφορίες αυτές να επιτυγχάνεται ο σχεδιασμός στοχευμένων παρεμβάσεων (Karagiannakis & Noël, 2020). Ως εκ τούτου, η σκιαγράφηση του μαθηματικού γνωστικού προφίλ με βάση το τετραπλό μοντέλο κατηγοριοποίησης των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων/δυσκολιών μπορεί να διαδραματίσει καθοριστικό ρόλο στον σχεδιασμό και την εφαρμογή κατάλληλων προγραμμάτων παρέμβασης. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να δοθεί μεγάλη προσοχή στα ατομικά χαρακτηριστικά και τις εκπαιδευτικές ανάγκες των μαθητών με ΜΔΜ, λαμβανομένων υπόψη των δυνατών και των αδύναμων σημείων τους (Kroesbergen, Huijsmans & Friso-van den Bos, 2022), προκειμένου να προταθούν οι αντίστοιχες εξατομικευμένες στρατηγικές διδασκαλίας.

Αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου αποτελούν οι πρακτικές διδασκαλίας που φαίνεται να είναι αποτελεσματικές με βάση τη διεθνή βιβλιογραφία σε μαθητές με ΜΔΜ-Δυσαριθμσία, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να καταρτιστεί το ενδεδειγμένο πρόγραμμα παρέμβασης με βάση το μαθηματικό γνωστικό προφίλ κάθε μαθητή.

## Βιβλιογραφία

---

- Alloway, T. P., Gathercole, S. E., Adams, A. M., Willis, C., Eaglen, R., & Lamont, E. (2005). Working memory and phonological awareness as predictors of progress towards early learning goals at school entry. *British Journal of Developmental Psychology*, 23(3), 417–426.
- American Psychiatric Association (2013). Dyscalculia. In *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (5th ed.) <https://doi.org/10.1176/appi.books.9780890425596.dsm05>
- Andersson, U., & Östergren, R. (2012). Number magnitude processing and basic cognitive functions in children with mathematical learning disabilities. *Learning and Individual Differences*, 22(6), 701–714.
- Ancker, J. S., & Kaufman, D. (2007). Rethinking health numeracy: A multidisciplinary literature review. *Journal of the American Medical Informatics Association JAMIA*, 14(6), 713–721.
- Ashkenazi, S., Black, J., Abrams, D., Hoeft, F., & Menon, V. (2013). Neurobiological underpinnings of math and reading learning disabilities. *J. Learn. Disabil.* 46(6), 549-569. [10.1177/0022219413483174](https://doi.org/10.1177/0022219413483174).

- Ashkenazi, S., Mark-Zigdon, N., & Henik, A. (2013). Do subitizing deficits in developmental dyscalculia involve pattern recognition weakness? *Developmental Science*, *16*(1), 35–46.
- Attout, L., Salmon, E., & Majerus, S. (2015). Working memory for serial order is dysfunctional in adults with a history of developmental dyscalculia: Evidence from behavioral and neuroimaging data. *Developmental Neuropsychology*, *40*(4), 230–247.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M. K., & Nurmi, J. E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to Grade 2. *J. Educ. Psychol.* *96*, 699–713. 10.1037/0022-0663.96.4.699.
- Barbarese, W. J., Katusic, S. K., Colligan, R. C., Weaver, A. L., & Jacobsen, S. J. (2005). Math learning disorder: Incidence in a population-based birth cohort, 1976–82, Rochester, Minn. *Ambulatory Pediatrics*, *5*(5), 281–289.
- Bartelet, D., Ansari, D., Vaessen, A., & Blomert, L. (2014). Cognitive subtypes of mathematics learning difficulties in primary education. *Research in Developmental Disabilities*, *35*(3), 657–670.
- Boets, B., & De Smedt, B. (2010). Single-digit arithmetic in children with dyslexia. *Dyslexia*, *16*(2), 183–191.
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *J. Child Psychol. Psychiatry*, *46*(1), 3–18. 10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x
- Cragg, L., & Gilmore, C. (2014). Skills underlying mathematics: The role of executive function in the development of mathematics proficiency. *Trends Neurosci, Educ.* *3*(2), 63–68. 10.1016/j.tine.2013.12.001.
- Chu, F. W., & Geary, D. C. (2015). Early numerical foundations of young children's mathematical development. *J. Exp. Child Psychol.* *132*, 205–212. 10.1016/j.jecp.2015.01.006
- Cirino, P. T., Ewing-Cobbs, L., Barnes, M., Fuchs, L. S., & Fletcher, J. M. (2007). Cognitive arithmetic differences in learning disability groups and the role of behavioral inattention. *Learning Disabilities Research and Practice*, *22*, 25–35.
- Crollen, V., & Noël, M. P. (2017). How does space interact with numbers? In M. S. Khine (Ed.), *Visual-spatial ability in STEM education. Transforming research into practice* (pp. 241–263). Ville: Springer International Publishing.
- Crollen, V., & Noël, M. P. (2015). Spatial and numerical processing in children with high and low visuospatial abilities. *Journal of Experimental Child Psychology*, *132*, 84–98.
- Crollen, V., Vanderclausen, V., Allaire, F., Pollaris, A., & Noël, M. P. (2015). Spatial and numerical processing in children with non-verbal learning disabilities. *Research in Developmental Disabilities*, *47*, 61–72.
- De Smedt, B., Noël, M. P., Gilmore, C., & Ansari, D. (2013). How do symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children's mathematical skills? A review of evidence from brain and behaviour. *Trends Neurosci, Educ.* *2*, 48–55. 10.1016/j.tine.2013.06.001.
- de Souza Salvador L., Moura R., Wood G., & Geraldi Haase, V. (2019). Cognitive heterogeneity of math difficulties: a bottom-up classification approach. *J. Numerical Cogn.* *5*, 55–85. 10.5964/jnc.v5i1.60.
- De Visscher, A., & Noël, M. P. (2014a). Arithmetic facts storage deficit: The hypothesis of hypersensitivity-to-interference in memory. *Developmental Science*, *17*(3), 434–442.
- De Visscher, A., & Noël, M. P. (2014b). The detrimental effect of interference in multiplication facts storing: Typical development and individual differences. *Journal of Experimental Psychology: Genera*, *143*(6), 2380–2400.
- De Visscher, A., Szmalec, A., Van der Linden, L., & Noël, M. P. (2015). Serial-order learning impairment and hypersensitivity-to-interference. *Cognition*, *144*, 38–48.